Боймурод Алиев

ГЕОМЕТРИЯ

(ибтидои стереометрия)

Китоби дарсӣ барои синфи 10-уми муассисаҳои
таҳсилоти умумӣ

Нашри сеюм

Вазорати маориф ва илми Ҷумҳурии
Тоҷикистон тасдиқ кардааст

Душанбе
2020

ББК 22.151Я72
А-49

АЛИЕВ Боймурод. Геометрия. Китоби дарсӣ барои синфи 10-уми муассисаҳои таҳсилоти умумӣ. Душанбе: КВД «Комбинати полиграфии шаҳри Душанбе», соли 2020. –184 саҳ.

Хонандаи азиз!

Китоб манбаи донишу маърифат аст, аз он баҳравар шавед ва онро тоза нигоҳ доред! Кӯшиш кунед, ки соли таҳсили оянда ҳам ин китоб ҳамин гуна зебову ороста дастраси хонандагони дигар гардад ва онҳо низ аз он истифода баранд.

Ҷадвали истифодаи китоб

№	**Ному насаби хонанда**	**Синф**	**Соли таҳсил**	**Ҳолати китоб (баҳои китобдор)**	
				Аввали сол	**Охири сол**
1					
2					
3					
4					
5					

ISBN 97-99947-790-4-8

Моликияти давлат.

САРСУХАН

Китоби мазкур аз рӯйи барномаи таълими фанни математика барои синфҳои 5-11-уми муассисаҳои таҳсилоти умумӣ (Душанбе: ҶДММ “Душанбе-принт”, 2018) бо ба инобат гирифтани Консепсияи миллии маълумот ва талаботи Стандарти давлатии маълумот аз математика навишта шудааст. Амалан мундариҷаи китоб аз доираи барномаи таълими геометрия васеътар буда, қариб тамоми маводди таълимиро аз фанни геометрия барои синфи 10-уми муассисаҳои таълимии равияи табиию риёзӣ дар бар мегирад. Аз ин хотир китобро дар литсею гимназияҳо низ ба сифати китоби дарсӣ истифода кардан мумкин аст.

Китоб аз 6 параграф иборат аст. Дар параграфҳои 1–4-и он аксиомаҳои стереометрия ва алоқаи онҳо бо аксиомаҳои планиметрия, ҷойгиршавии байниҳамдигарии нуқтаҳо, хатҳои рост ва ҳамвориҳо, тавсифҳои гуногуни ин ҷойгиршавиҳо ва алоқаи байни онҳо (параллелӣ; перпендикулярӣ; масофаи байни нуқтаҳо, хатҳои рост, ҳамвориҳо; алоқаи байни муносибатҳои параллелӣ ва перпендикулярӣ; кунҷи байни хатҳои рост ва ҳамвориҳо) баён карда шудааст. Ин мавод қисми душворфаҳми геометрияи мактабӣ ба ҳисоб меравад. Душвориаш дар он зоҳир мегардад, ки дарки мафҳумҳо, тасдиқот ва исботи онҳо сатҳи баланди тасаввуроти фазоӣ доштанро талаб карда, масъалаҳояш асосан ҳисобӣ нестанд. Яъне ҳалли масъалаҳо аз сохтанҳо ва исботҳо иборат мебошад.

Мувофиқи методологияи таълими ҳозира, ки дар муассисаҳои таълимии Ҷумҳурии Тоҷикистон амал мекунад, дар китоб параллелӣ ва перпендикулярии хатҳои рост на ҳамҷоя, балки алоҳида муоина карда мешаванд. Ба ибораи дигар, қисми аффиннии ибтидои стереометрия (геометрияи параллелӣ ва буриши хатҳои рост бо ҳамвориҳо) аз қисми метрикии он (геометрияи перпендикулярӣ, масофаҳо ва кунҷҳо) ҷудо карда шудааст. Ҳангоми чунин ҷудокунӣ методҳои ҳалли масъалаҳои аффиннӣ аз метрикӣ фаҳмотар ва дастрас мегарданд. Дигар ин ки ҳангоми баёни масъалаҳои стереометрӣ маводди планиметрие, ки барои дарк кардани онҳо зарур аст, хотирнишон карда мешавад. Бар замми ин дар китоб ба шабоҳати маводди ҳар ду қисми геометрия диққати махсус дода мешавад.

Дар параграфҳои 5–6 чунин мафҳумҳо, ба монанди координатаҳои нуқта, масофаи байни ду нуқта, координатаи буриш ва ҷойгиршавии ду хати рост, табдилдиҳӣ, вектор, дарозии вектор, зарби адад бар вектор, зарби скалярии векторҳо ва ғайраҳо, ки онҳо дар синфи 8-ум дар ҳамворӣ дохил ва омӯхта шуда буданд, дар фазо паҳн карда мешаванд.

Қисми назариявии ҳар як пункт бо саволҳои назоратӣ ба охир мерасад. Бо мақсади нишон додани татбиқи назария дар ҳар як пункт, ғайр аз пункти 1, ҳалли якчанд масъала оварда мешавад. Масъалаҳои барои ҳалли мустақилона пешбинишуда дар ҳар як пункт миқдоран каме зиёданд, бинобар ин на ҳар хонанда барои ҳалли ҳамаи онҳо фурсат меёбад. Ба ин саъй кардан ҳам лозим нест. Пиндошта мешавад, ки бо назардошти қобилият вазифаи хонагӣ фардӣ хоҳад буд. Масъалаҳое, ки ҳаллашон каме мураккаб аст, бо аломати * ишорат шудаанд.

Ҳар як пункт бо масъалаҳо барои такрор ба охир мерасад. Масъалаҳои стереометрии ин қисм бо истифодаи назарияи пунктҳои пешина ҳал мешаванд. Масъалаҳои планиметрӣ чун қоида шабоҳати стереометриро надоранд. Ин масъалаҳоро бо мақсади фаромӯш нашудани маводди синфҳои 7–9-ум ва тайёрӣ ба олимпиадаҳо ва имтиҳонҳо пешниҳод кардаем.

Яке аз талаботи Стандарти давлатии маълумоти умумӣ дар Тоҷикистон донистани осори илмии ниёгон аст. Бо ҳамин мақсад дар китоб маълумоти мухтасари таърихӣ оварда шудааст, ки дар он ба натиҷаҳои чандин нобиғаи илми Шарқ, алалхусус Осиёи Марказӣ доир ба параллелӣ ва перпендикулярӣ дар ҳамворӣ ва фазо диққати асосӣ дода мешавад. Мавҷуд будани чунин мавод ба хонанда аз умумибашарӣ будани натиҷаҳои илмӣ гувоҳӣ дода, боиси ифтихор ва хештаншиносии ӯ мегарданд.

Сохтори китоб айнан сохтори китобҳои дарсии чопшудаи «Алгебра»-и синфҳои 7–ll-умро мемонад. Ягонагии сохтори китобҳои дарсии фанҳои алгебра ва геометрия омӯхтани математикаро осонтар мекунад.

Ҳангоми навиштани китоб чунин китобҳои дарсӣ ва методӣ, ба мисли «Геометрия 7-11» (муал. А. В. Погорелов, 1991), «Геометрия в 9 классе» (А. Н. Земляков, 1988), Элементарная геометрия» (А. П. Киселев, 1980), «Геометрия для 9-10 классов» (А. Д. Александров ва диг., 1988), «Элементарная геометрия» (А. Г. Болтянский, 1985), «Сборник задач по геометрии для 9–10 классов» (В. А. Гусев ва диг., 1977), «История математики в школе: 9-10 классы» (Г.И. Глейзер, 1983), ки онҳоро нашриёти «Просвещение»-и Маскав чоп кардааст, истифода шудаанд. Баъзе масъалаҳои барои мустаҳкамкунии маводди назариявӣ пешниҳодшуда ва чор масъалаи ҳалшуда, ки дар ҳалли онҳо паҳлуҳои маводди назариявӣ ниҳоят назаррасанд (масалан, масъалаи 2-и пункти 12), аз ҳамин китобҳо гирифта шудаанд.

Нашри навбатии китоб баъди реҳлати муаллифи он, профессор Боймурод Алиев омода шудааст. Дар ин нашр тағйироти зерин ба чашм мерасанд:

- матни китоб бо назардошти меъёрҳои нави имлои забони тоҷикӣ ба риштаи таҳрир кашида шудааст;
- хатоҳои математикие, ки дар нашрҳои пештара роҳ ёфта буданд, ислоҳ карда шудаанд;

- яке аз талаботи асосии низоми таҳсилоти муносибати босалоҳият ин фаъол гардонидани хонандагон дар раванди таълим тавассути саволу ҷавоб ва додани супоришҳо оид ба мавзӯи матраҳшаванда мебошад, то ки хонандагон баъди гузаштани ҳар як мавзӯъ салоҳиятҳои зарурирo ба даст оранд. Ба иборaи дигар, хонандагон бояд маводди назариявии ҳар як мавзӯъро пеш аз омӯзиши мавзӯи нав пурра азхуд кунанд ва дониши назариявии гирифтаашонро дар ҳалли мисолу масъалаҳои амалӣ татбиқ карда тавонанд. Инро ба инобат гирифта, миқдори саволҳо оид ба баъзе мавзӯъҳо зиёд карда шудаанд;
- параграфи 7-уми китоб, ки ба омӯзиши бисёррӯяҳо бахшида шуда буд, соқит карда шуд, чунки омӯзиши он мутобиқи барномаи таълими амалкунанда дар курси геометрияи синфи 11-ум пешбинӣ шудааст;
- аз сабаби он ки масъалаҳои стереометрӣ доир ба исбот душвор ҳастанд, ҳалли пурраи масъалаҳои №61, 69, 98, 112, 122, 180 дар қисми ҷавобҳо оварда шудааст;
- дар охири китоб маълумотномаи мухтасар оид ба мафҳумҳои асосии курси геометрияи синфи 10-ум оварда шудааст, ки аз он хонандагон зимни ҳалли масъалаҳо метавонанд самаранок истифода баранд;
- китоб аз нав саҳифабандӣ шудааст.

Аз хонандагон эҳтиромона хоҳиш карда мешавад, ки фикру мулоҳизаҳояшонро нисбат ба мазмуну мундариҷаи китоб ба Вазорати маориф ва илми Ҷумҳурии Тоҷикистон ва ё ба суроғаи электронии mahmadsalim_86@mail.ru ирсол кунанд. Андешаҳои судманд зимни омода кардани китоб барои нашрҳои оянда ба инобат гирифта мешаванд.

§1. АКСИОМАҲОИ СТЕРЕОМЕТРИЯ ВА НАТИҶАҲО АЗ ОНҲО

1. Фанни стереометрия. Мафҳумҳои асосии он

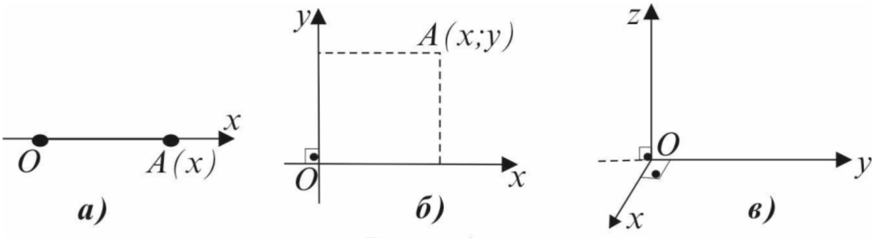
Мо аллакай **планиметрия** - қисми геометрияро, ки дар он фигураҳо дар ҳамворӣ омӯхта мешаванд, медонем (Калимаи planimetria аз решаи лотинии planum - сатҳи ҳамвор, ҳамворӣ ва бандаки юнонии metreo - чен мекунам иборат аст). Мафҳумҳои асосии планиметрия - **нуқта** ва **хати рост,** инчунин **аксиомаҳои** онро истифода карда, хосиятҳо ва формулаҳоро барои фигураҳои ҳамвор, ба монанди кунҷ, секунҷа, чоркунҷа, бисёркунҷа, давра, доира ҳосил карда будем.

Акнун ба омӯзиши қисми дигари геометрия **стереометрия** (аз калимаи юнонии stereos-фазоӣ ва metreo-чен мекунам) шурӯъ мекунем. Дар ин қисм **фигураҳои фазоӣ,** яъне фигураҳое, ки онҳоро дар як ҳамворӣ ҷойгир кардан мумкин нест, омӯхта мешаванд. Худи ҳамворӣ, ки дар планиметрия ҳамаи фигураҳо дар он ҷойгир буданд, дар стереометрия танҳо яке аз фигураҳои имконпазир мегардад.

Стереометрия шакл, андоза ва ҷойгиршавии (вазъияти) байниҳамдигарии фигураҳои фазоиро меомӯзад. Дар айни ҳол ҳамаи дигар хосиятҳои фигураҳо ба эътибор гирифта намешаванд. Масалан, доир ба куби теғааш 5 *см* ё параллелепипеди сатҳаш 18 $см^2$ буда мулоҳиза рондан мумкин аст, вале дар геометрия доир ба куби сиёҳ ё параллелепипеди оҳанӣ сухан гуфтан мумкин нест, чунки ҷисмҳои геометрӣ дорои чунин хосиятҳо нестанд.

Бар хилофи ҳамвории дученака (ё хати рости якченака), фазо, ки дар стереометрия омӯхта мешавад, **сеченака** мебошад. Ин тасдиқро маънидод мекунем.

Дар хати рост (расми 1, *а*) аз нуқтаи ибтидоии *O* ба чап ва ба рост қад-қади ин хат ҳаракат кардан мумкин аст. Яъне мавқеи ҳар гуна нуқтаи *A* бо як адади мусбат ё манфӣ (вобаста ба самти ҳаракат), ки **координатаи** ин нуқта ном дорад, муайян карда мешавад.



Расми 1

Дар ҳамворӣ (расми 1, *б)* аз нуқтаи ибтидоӣ қад-қади ду хати рости перпендикуляр ба чапу рост ва ба болову поён ҳаракат кардан мумкин аст. Мавқеи ҳар гуна нуқта бо ду адад тавсиф (муайян) карда мешавад. Ин ададҳо бузургии ҷойивазшавиро қад-қади ин хатҳо ба рост (ба чап) ва ба боло (ба поён) ифода мекунанд. Дар фазо бошад (расми 1, *в*), аз нуқтаи *O* се самти ҷуфт-ҷуфт перпендикуляри ҷойивазшавӣ мавҷуд аст: ба чапу рост, ба болову поён, ба пешу қафо. Дар §5 чӣ тавр қайд кардани нуқта дар фазо нишон дода мешавад.

Ҳанӯз ба омӯзиши хосиятҳои фигураҳои геометрӣ шурӯъ накарда бошем ҳам, аммо, масалан, чӣ будани куб ё кураро нағз тасаввур карда метавонем. Вале дар геометрия дар бораи фигура танҳо ҳамон вақт сухан рондан мумкин аст, ки агар таърифи он дода шуда бошад.

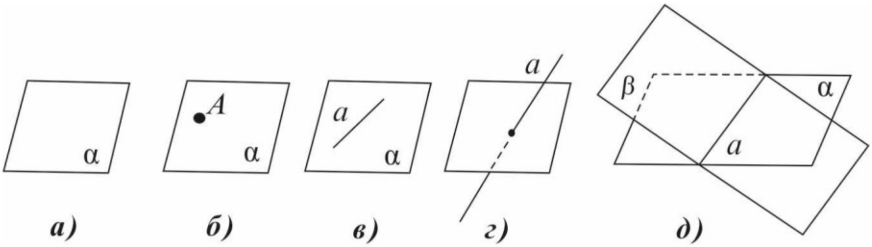
Моҳияти ҳар гуна таъриф, тавре маълум аст, аз он иборат мебошад, ки мафҳуми муайяншаванда (масалан, квадрат) бо ёрии мафҳуми аллакай муайянбуда (масалан, ромб ё росткунҷа) тавсиф карда мешавад. Дар навбати худ мафҳуми «аллакай муайянбуда» бояд бо ёрии мафҳумҳои аз он пеш муайянкардашуда тавсиф шавад (масалан, ромб бо ёрии параллелограмм) ва ҳоказо. Аммо миқдори фигураҳои геометрӣ беохир нест. Бинобар ин охири охирон мо ба ҳолате дучор меоем, ки фигураи ба он ҳаволашаванда (такяшаванда) вуҷуд надорад.

Барои ҳамин маҷбурем, баъзе фигураҳоро бе таъриф қабул кунем.

Мафҳумҳое, ки ин фигураҳоро ифода мекунанд (чун қоида содатаринашонро), дар геометрия мафҳумҳои асосӣ меноманд. Ин мафҳумҳо бе таъриф оварда (муоина) мешаванд, вале аз ҳаёти ҳаррӯза ҳамаи мо доир ба онҳо тасаввуроти аниқ дорем.

Мафҳумҳои (фигураҳои) асосии (ибтидоии) стереометрия **нуқта, хати рост** ва **ҳамворӣ** мебошанд. Сақочаи ниҳоят хурд доир ба нуқта, риштаи таранг кашидашуда доир ба хати рост, сатҳи миз, деворҳо ё оби кӯл доир ба қисми ҳамворӣ тасаввурот дода метавонанд. Вале ин тасаввурот пурра нест, чунки ҳамаи ҷисмҳои воқеӣ мумкин андозаҳои хеле калон, вале охирнок доранд. Масалан, ҳар гуна қисми девор сеченака аст: дарозӣ, бар ва баландӣ дорад.

Дар стереометрия хати рост ва ҳамворӣ аз нуқтаҳо иборатанд ва андозаҳои охирнок (дарозӣ ё бар) надоранд. Онҳоро дар ҳамаи самтҳо (хати ростро дар ду самт) ҳамчун беохир тӯлкашида тасаввур кардан мумкин аст. Бар хилофи планиметрия, ки як ҳаморӣ дошт ва ҳамаи фигураҳо дар ҳамин ҳамворӣ ҷойгир буданд, дар стереометрия бо ҳамвориҳои гуногун сару кор доштан лозим меояд. Дар расм мо танҳо қисми ҳамвориро, чун қоида дар шакли параллелограмм (расми 2, *а)* тасвир карда, онро ба ҳама тараф номаҳдуд давомдодашуда тасаввур мекунем. Қарор медиҳем, ки нуқтаҳоро бо ҳарфҳои калони лотинии *A,B,C,...;* хатҳои ростро бо ҳарфҳои хурди лотинии *a,b,c,...* (баъзан бо ду ҳарфи калони лотинӣ, ки нуқтаҳои хати ростанд); ҳамвориҳоро бо ҳарфҳои хурди юнонии $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$,... ишорат мекунем.



Расми 2

Стереометрия хосиятҳои фигураҳоеро, ки аз нуқтаҳо, хатҳои рост ва ҳамвориҳо дар фазо иборатанд, омӯхта, чунин калимаҳо, ба монанди «параллеланд», «перпендикуляранд», «ҷойгиранд», «мегузаранд», «мебуранд», «баробаранд» ва ғайраро истифода мекунад. Ин калимаҳо **муносибатҳоро** дар байни фигураҳо ифода мекунанд.

Фаҳмост, ки ба ҳар муносибат низ бояд таъриф дода шавад. Вазъ дар ин ҷой ҳам айнан мисли ҳолати таърифи фигураҳои геометрӣ мебошад: муносибатҳое пайдо мешаванд, ки онҳоро таъриф додан номумкин аст ва маҷбурем баъзеи онҳоро бе таъриф қабул кунем.

Муносибатҳои **«ҷойгир будан», «бурида шудан», «баробар будан», «тааллуқ доштан»** низ мафҳумҳои асосии стереометрия мебошанд. Онҳо зоҳиран фаҳмо ҳисоб карда мешаванд, бинобар ин таъриф надоранд, яъне мафҳумҳои ибтидоианд.

Агар нуқтаи A ба ҳамвории α тааллуқ дошта бошад (расми 2, *б),* он гоҳ мегӯянд, ки ҳамвории α аз рӯйи нуқтаи A мегузарад ва рамзӣ менависанд: $A\in \alpha$. Навиштаҷоти $A\notin \alpha$ нишон медиҳад, ки нуқтаи A ба ҳамвории α тааллуқ надорад.

Агар ҳар як нуқтаи хати рости a ба ҳамвории α тааллуқ дошта бошад (расми 2, *в),* он гоҳ мегӯянд, ки хати рост дар ҳамворӣ ҷойгир аст ва $a\in\alpha$ менависанд. Навиштаҷоти $a\notin \alpha$ маънои онро дорад, ки хати рости a дар ҳамвории α ҷойгир нест, яъне ақаллан як нуқтаи хати рост ба ҳамворӣ тааллуқ надорад.

Агар хати рости a ва ҳамвории α танҳо якто нуқтаи умумӣ дошта бошанд (расми 2, *г),* он гоҳ мегӯянд, ки ин хати рост ҳамвориро мебурад.

Агар хати рости a ба ду ҳамвории гуногун α ва β тааллуқ дошта бошад (расми 2, *д*), он гоҳ мегӯянд, ки ин ҳамвориҳо аз рӯйи хати рости a бурида мешаванд (ҳамдигарро мебуранд).

Оянда дар расмҳо қисми хати рост ё ҳамворӣ, ки ба чашм аён нест, бо хати рах-рах ифода карда мешавад.

Саволу супоришҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Мафҳумҳои асосии планиметрияро номбар кунед.

2.Мафҳумҳои асосии стереометрияро хотирнишон кунед.

3. Стереометрия чиро меомӯзад?

4.Сеченака будани фазоамонро чӣ тавр фаҳмондан мумкин аст?

5.Муносибатҳои ибтидоии стереометрияро номбар кунед.

6.Рамзҳои тааллуқ доштан ва ё надоштан кадомҳоянд? Мисолҳо оред.

Масъалаҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

1. Кадоме аз ин фигураҳо ё ҷисмҳо дар ҳамворӣ ҷойгир нестанд: секунҷа, миз, порча, давра, параллелепипед, китоб, доира, кура, куб, квадрат, телевизор, трапетсия?

2. Ҳамвории α-и дорои нуқтаи B-ро тасвир кунед. Инро бо истифодаи рамзи тааллуқ доштан нависед.

3. Хати рости b дар ҳамвории β ҷойгир аст. Инро рамзӣ нависед.

4. Хати рост ҳамвориро дар нуқта мебурад. Нақшаи мувофиқро кашида, онро рамзӣ нависед.

5. Маълум аст, ки ду нуқтаи хати рости a дар ҳамвории α ҷойгир аст. Доир ба ин хати рост чӣ гуфтан мумкин аст? Нақшаи мувофиқро кашед.

6. Ду ҳамворӣ ду нуқтаи умумӣ доранд. Доир ба хати росте, ки ин нуқтаҳоро пайваст мекунад, чӣ гуфтан мумкин аст? Нақшаи мувофиқро кашед.

7. Рӯяи параллелепипед ҳамворӣ шуда метавонад? Қисми ҳамворӣ чӣ?

8. Ҳамворӣ фазоро ба чанд қисм ҷудо мекунад?

9. Ду ҳамворие, ки ҳамдигарро мебуранд, фазоро ба чанд қисм ҷудо мекунанд?

Масъалаҳо барои такрор

10. Нуқтаҳои A,B,C дар як хати рост ҷойгиранд. Дарозии порчаи BC-ро ёбед, агар $AB = 3{,}2$м ва $AC = 4{,}4$м бошад. Масъала чанд ҳал дорад?

11. Чор хати рости a, b, c, d дода шудаанд. Маълум аст, ки хатҳои a, b, c дар як нуқта бурида мешаванд. Хатҳои b, c, d низ дар як нуқта бурида мешаванд. Исбот кунед, ки ҳамаи чор хати рости додашуда аз рӯйи як нуқта мегузаранд.

12. Кунҷҳои назди асоси секунҷаи баробарпаҳлу α чунинанд, ки $tg\alpha = 4$ аст. Масоҳати ин секунҷа 25 см^2 мебошад. Дарозии асоси ин секунҷаро ёбед.

13. Хати миёнаи трапетсияи баробарпаҳлу, ки дар атрофи доира кашида шудааст, ба 68 см баробар аст. Радиуси ин доираро ёбед, агар асоси поёнии трапетсия аз асоси болоиаш 64 см зиёд бошад.

2. Аксиомаҳои стереометрия ва алоқаи онҳо бо аксиомаҳои планиметрия. Натиҷаҳо аз аксиомаҳои стереометрия

I. Мисли планиметрия дар стереометрия ҳам хосиятҳои фигураҳои геометрӣ бо тарзи исбот кардани тасдиқоти ба онҳо мувофиқ (теоремаҳо) муқаррар карда мешаванд. Ҳар гуна исбот бошад, аз муҳокимаронихое иборат аст, ки онҳо тасдиқоти навро ба тасдиқоти аллакай исботшуда меоранд. Барои ҳамин дар ин ҷой ҳам вазъият айнан ҳолати таърифи мафҳумҳои геометриро мемонад: мо ба тасдиқоти аввалине меоем, ки онҳоро исбот кардан мумкин нест, чунки ҳангоми исботи онҳо чизе нест, ки ба он такя кунем.

Чунин тасдиқоти аввалин (чун қоида ниҳоят сода) аксиомаҳо ном доранд ва дурустии онҳо бе исбот қабул карда мешавад. Дар геометрия ба сифати аксиомаҳо тасдиқоте кабул карда мешаванд, ки онҳо ба фигураҳои асосии геометрӣ хосанд ва барои мушоҳидакунанда амалан возеҳанд.

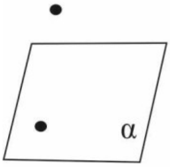
Тавре дар пункти 1 қайд кардем, фигураҳои асосӣ дар фазо нуқта, хати рост ва ҳамворӣ мебошанд. Аксиомаҳоеро, ки хосиятҳои асосии нуқта ва хати ростро дар як ҳамворӣ ифода мекарданд, ҳангоми ба омӯзиши планиметрия шурӯъ кардан дохил карда будем. Дар фазо дохил кардани фигураи нави асосӣ - **ҳамворӣ** васеъ кардани ин аксиомаҳоро талаб мекунад. Ин аксиомаҳо хосиятҳои ҳамвориҳо, алоқамандии онҳоро бо ду фигураи дигари асосии стереометрия - нуқта ва хати рост ифода мекунанд. Аксиомаҳо инҳо мебошанд:

C_1. Ҳамворӣ чи хеле ки бошад, нуқтаҳое ҳастанд, ки ба ин ҳамворӣ тааллуқ доранд ва нуқтаҳое ҳастанд, ки ба он тааллуқ надоранд (расми 3).

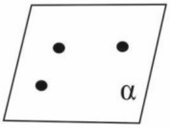
C_2. Аз се нуқтае, ки дар як хати рост ҷойгир нестанд, танҳо як ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст. (расми 4).

Мазмуни ин аксиома он аст, ки агар мо се нуқтаи дар як хати рост ҷойгирнабударо дошта бошем, он гоҳ аз рӯйи онҳо ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст ва фақат якто. Агар ин нуқтаҳо дар як хати рост ҷойгир бошанд, он гоҳ аз болои онҳо миқдори беохири ҳамвориҳоро гузаронидан мумкин аст. Алалхусус, аз рӯйи хати рости додашуда миқдори беохири ҳамвориҳоро гузаронидан мумкин мебошад.

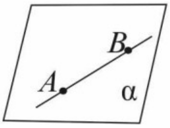
Ин вазъиятро дар мисоли китоб ё дафтар, ки ҳар як вараќи онҳо қисми ҳамворӣ аст, мушоҳида кардан имкон дорад.



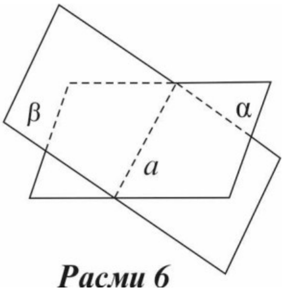
Расми 3



Расми 4



Расми 5



Расми 6

C_3. Ҳамвории бо хати рост ду нуқтаи умумидошта тамоми хати ростро дар бар мегирад (расми 5).

Ин аксиома тасдиқ мекунад, ки агар ду нуқтаи хати рост ба ҳамворӣ тааллуқ дошта бошанд, он гоҳ ҳар як нуқтаи ин хати рост дар ҳамворӣ мехобад. Ҳамин тариқ, барои нишон додани он ки хати рост дар ҳамворӣ ҷойгир аст, кифоя аст, нишон диҳем, ки ду нуқтаи он ба ин ҳамворӣ тааллуқ дорад.

C_4. Буриши ду ҳамвории ҳамдигарро буранда хати рост аст (расми 6).

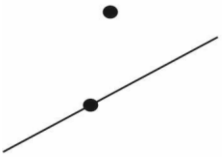
Яъне агар ду ҳамворӣ як нуқтаи умумӣ дошта бошанд, он гоҳ онҳо хати рости умумӣ доранд ва ҳар гуна нуқтаи ба ҳар ду ҳамворӣ тааллуқдошта дар ин хати рост ҷойгир аст.

Аксиомаҳои $C_1 - C_4$ танҳо бо ҳамвориҳо марбутанд. Ба онҳо бояд аксиомаҳо дар бораи хатҳои рост, ки ба аксиомаҳои мувофиқи планиметрия монанданд (шабеҳанд), илова карда шаванд. Аксиомаҳои $C_1 - C_4$ дар якҷоягӣ бо ин аксиомаҳо *системаи аксиомаҳои* стереометрияро ташкил медиҳанд. Барои пуррагии баён ин аксиомаҳоро бо назардошти он ки хати рост фигураи фазоӣ аст, меорем.

P_1. Хати рост чи хеле ки бошад, нуқтаҳое ҳастанд, ки ба ин хати рост тааллуқ доранд ва нуқтаҳое ҳастанд, ки ба он тааллуқ надоранд.

P_2. Аз рӯйи ду нуқтаи дилхоҳ хати рост гузаронидан мумкин аст ва фақат якто.

Дар ин ду аксиома сухан на дар бораи нуқтаҳои ҳамвории мушаххас, чи тавре ки дар планиметрия буд, балки дар бораи хатҳои рост ва нуқтаҳои фазо меравад.



Расми 7

Расми 8

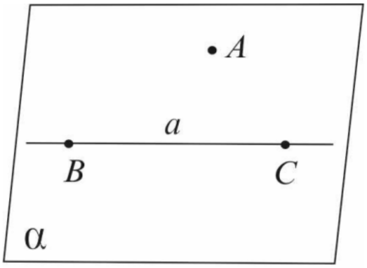
Масалан, дар аксиомаи P_2 нуқтаҳо дар ҳамвориҳои гуногун ҷойгир шуда метавонанд. Мазмуни ин ду аксиома дар расмҳои 7 ва 8 акс ёфтаанд.

Тавре дида мешавад, аксиомаи C_1 ба аксиомаи P_1 ва C_2 ба P_2 монанд аст. Дар C_1 хати рост ба ҳамворӣ ва дар C_2 ду нуқтаи дар P_2 буда ба се нуқтаи дар як хати рост воқеънабуда иваз карда шудаанд.

Дар оянда дигар аксиомаҳои планиметрия дар ҷойи зарурӣ бо назардошти фазо муҳокима шуда, баъд истифодаи онҳо нишон дода мешавад.

II. Аксиомаҳои C_1 - C_4 имконият медиҳанд, ки дар фазо сохтанҳо иҷро карда шаванд. Ин *сохтанҳо* аз гузаронидани ҳамвориҳо иборатанд. Аксиомаи C_2 тасдиқ мекунад, ки се нуқтаи дар як хати рост ҷойгирнабуда ҳамвориро ба таври ягона муайян мекунад. Пурсида мешавад, боз чӣ тавр (бо ёрии фигураҳои содатарин - хати рост ва нуқта) ҳамвориро ба таври ягона муайян кардан (додан) мумкин аст? Ҷавобро дар шакли теоремаҳо меорем.

Теоремаи 1. *Аз рӯйи хати рост ва нуқтаи дар он ҷойгирнабуда ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст ва фақат якто.*



Расми 9

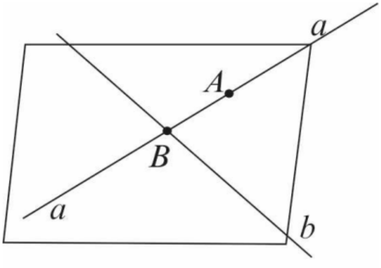
Исбот. Бигзор *a* хати рости додашуда ва *A* нуқтаи дар *a* ҷойгирнабуда бошанд. Нуқтаҳои *B* ва *C*-ро, ки ба *a* тааллуқ доранд, мегирем (расми 9). Нуқтаҳои *A, B, C*, ки дар як хати рост намехобанд, мувофиқи аксиомаи C_2 ҳамвории α-ро муайян мекунанд. Ин ҳамворӣ нуқтаҳои *B* ва *C*-и хати *a*-ро дар бар мегирад. Пас, мувофиқи аксиомаи C_3 хати рости *a* дар ҳамвории α ҷойгир аст. Ҳамин тариқ, хати рости *a* ва нуқтаи дар он нахобидаи *A* ҳамвории α - ро муайян мекунанд. Ягона будани ин ҳамворӣ аз аксиомаи C_2 бармеояд. Теорема исбот шуд.

Эзоҳи 1. Аз рӯйи ду нуқта ё якчанд нуқтаи дар як хати рост ҷойгирбуда ва ё як хати рост миқдори зиёди (беохири) ҳамвориҳоро гузаронидан мумкин аст (ниг. ба шарҳи аксиомаи C_2). Кифоя аст, ки дурустии ин тасдиқро дар мисоли хати рости *a* нишон диҳем. Берун аз ин хат нуқтаи *A*-ро интихоб карда (аксиомаи P_1), нисбат ба хати росту ин нуқта теоремаи 1-ро татбиқ мекунем. Ҳамвории α -ро ҳосил мекунем, ки аз рӯйи ин хати рост мегузарад. Барои нишон додани мавҷудияти дигар ҳамвории аз рӯйи ин хат гузаранда, боз берун аз ҳамвории α нуқтаи *C*-ро мегирем (аксиомаи C_1). Нуқтаи *C* дар хати рости *a* ҷойгир нест, бинобар ин мувофиқи теоремаи 1 аз рӯйи онҳо ҳамвории β- ро мегузаронем. Ҳамвориҳои α ва β гуногунанд, чунки нуқтаи *C*-и ҳамвории β дар ҳамвории α ҷойгир нест. Ҳар дуи ин ҳамвориҳо аз рӯйи хати рости *a* мегузаранд. Сабаби беохир будани миқдори чунин ҳамвориҳо ихтиёрӣ будани интихоби нуқтаи *C* мебошад.

Теоремаи 2. *Аз рӯйи ду хати рости ҳамдигарро буранда ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст ва фақат якто.*

Исбот. Бигузор *a* ва *b* ду хати рости ҳамдигарро буранда ва *A* нуқтаест, ки дар *a* ҷойгир буда, ба *b* тааллуқ надорад (расми 10). Мувофиқи теоремаи 1 хати *b* ва нуқтаи *A* ҳамвории α -ро ба таври ягона муайян мекунанд.

Аз сабаби он ки b дар α ҷойгир аст, нуқтаи буриши ин хатҳо B низ ба α мутааллиқ аст. Нуқтаҳои A ва B-и хати a дар α ҷойгиранд, пас мувофиқи аксиомаи C_3 ҳамвории α ин хатро дар бар мегирад. Инак, α ҳамвории ягонаи матлуб аст. Теорема исбот шудааст.



Расми 10

Мо ба саволи пеш аз баёни шарти теоремаи 1 гузоштаамон ҷавоб ҳосил кардем.

Ҳамвориро бо:

1) се нуқтаи дар як хати рост ҷойгирнабуда (аксиомаи C_2);

2) хати рост ва нуқтаи дар он ҷойгирнабуда (теоремаи 1);

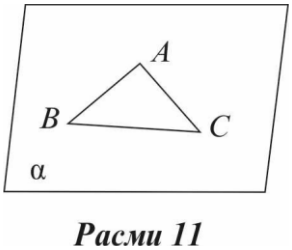
3) бо ду хати рости ҳамдигарро буранда (теоремаи 2) ба таври ягона муайян кардан мумкин аст. Аз рӯйи як хати рост ё се нуқтаи дар як хати рост ҷойгирбуда микдори беохири ҳамвориҳоро гузаронидан имкон дорад.

Эзоҳи 2. Ҳангоми исботи теоремаҳои 1 ва 2 аксиомаи C_1 истифода нашудааст. Пурсида мешавад, ки шояд ин аксиома лозим нест? Амалан, аксиомаи C_1 қатъиян муҳимтарин аксиомаи фазоӣ мебошад: маҳз аз он дар фазо мавҷудияти ҳамвориҳо ва хатҳои рости ҳамдигарро буранда, инчунин дигар фигураҳои дар як ҳамворӣ ҷойгирнабуда бармеоянд. Аксиомаи C_1-ро мо барои нишон додани дурустии тасдиқоти дар эзоҳи 1 зикршуда истифода кардаем.

Масъалаи 1. Нишон медиҳем, ки тарафҳои секунҷа дар як ҳамворӣ ҷойгиранд.

Ҳал. Бигузор секунҷаи ABC дода шудааст (расми 11).

Тарафҳои AB ва AC хатҳои ҳамдигарро бурандаанд. Пас, мувофиқи теоремаи 2 аз рӯйи онҳо як ҳамвории α-ро гузаронидан мумкин аст.



Расми 11

Ду нуқтаи тарафи BC дар ҳамвории α ҷойгир аст. Пас, мувофиқи аксиомаи C_3 тарафи BC дар α ҷойгир аст. Ҳамин тариқ, ҳар се тарафи секунҷа дар як ҳамворӣ мехобанд.

Масъалаи 2. Маълум аст, ки чор нуқта дар як ҳамворӣ намехобанд. Муайян мекунем, ки сетои дилхоҳи онҳо дар як хати рост ҷойгир шуда метавонанд ё не?

Ҳал. Фарз мекунем, ки сетои онҳо дар як хати рост ҷойгиранд. Агар нуқтаи чорум низ дар ин хати рост хобад, он гоҳ аз рӯйи онҳо микдори беохири ҳамвориҳоро гузаронидан мумкин аст. Ин бошад, ба шарти масъала зид аст. Рафту агар нуқтаи чорум дар ин хати рост нахобад, он гоҳ мувофиқи теоремаи 1 ягона ҳамворие гузаронидан мумкин аст, ки ин хати рост ва ин нуқтаро, яъне ҳар чор нуқтаро дар бар мегирад. Боз зиддият ба шарти масъала ҳосил шуд.

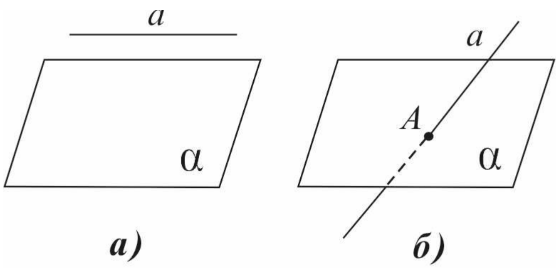
Ҷавоб: не.

Масъалаи 3. Нишон медиҳем, ки агар хатҳои рости AB ва CD дар як ҳамворӣ ҷойгир набошанд, он гоҳ хатҳои рости AC ва BD низ дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд.

Ҳал. Фарз мекунем, ки тасдиқ нодуруст аст ва хатҳои рости AC ва BD дар як ҳамвории α ҷойгиранд. Аз ин бармеояд, ки нуқтаҳои A, B, C, D дар α ҷойгиранд. Ба хатҳои рости AB ва CD аксиомаи C_3-ро татбиқ карда, ҳосил мекунем, ки онҳо дар ҳамвории α, яъне дар як ҳамворӣ ҷойгиранд. Ин бошад, ба шарти масъала зид аст.

III. Акнун маълумоти аввалинро нисбат ба ҷойгиршавии байниҳамдигарии фигураҳои асосии (ибтидоии) стереометрия - нуқта, хати рост ва ҳамворӣ меорем (дар ин бора дар мавзӯъҳои оянда маълумоти муфассал оварда мешавад). Тавре аллакай қайд карда шуд, ҷойгиршавии байниҳамдигарии ду ҳамвории гуногун бо аксиомаи C_4 муайян карда мешавад: агар ин ҳамвориҳо нуқтаи умумӣ дошта бошанд, он гоҳ аз рӯйи хати росте, ки ин нуқтаро дар бар мегирад, бурида мешаванд. Дар ин ҳолат онҳо бо ҳамдигар буридашаванда (ё кӯтоҳ буридашаванда) номида мешаванд. Мисоли чунин ҳамвориҳо ҳамвориҳое шуда метавонанд, ки онҳоро ҳангоми асоснок кардани эзоҳи 1 сохтем. Баъд, аз аксиомаҳои P_1 ва P_2 бармеояд, ки барои ҳар гуна хати рост дар фазо хати рости онро буранда вуҷуд дорад.

Ҳамин тариқ, ҷойгиршавии байниҳамдигарии ду хати рост (ду ҳамворӣ) чунин аст: ду хати рости (ҳамвории) гуногун ё нуқтаи умумӣ надоранд, ё дар як нуқта (аз рӯйи як хати рост) ҳамдигарро мебуранд.



Расми 12

Нисбат ба ҷойгиршавии байниҳамдигарии нуқта ва хати рост бошад, ду имконият вуҷуд дорад: ё нукта ба хати рост тааллуқ дорад, ё ба он тааллуқ надорад. Ҷойгиршавии байниҳамдигарии нуқта ва ҳамворӣ ҳам айнан ҳамин тавр аст. Ба масъалаи ҷойгиршавии байниҳамдигарии хати рост ва ҳамворӣ дар фазо аксиомаи C_3 ҷавоби пурра медиҳад: ҳамворӣ ва хати рости дар он ҷойгирнабуда ё ҳамдигарро намебуранд, ё дар як нуқта бурида мешаванд (расми 12).

Саволу супоришҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Аксиомаҳои стереометриро баён карда, онҳоро шарҳ диҳед.

2. Теоремаро доир ба хати рост ва нуқта баён кунед (теоремаи 1). Ҳангоми исботи ин теорема кадом аксиомаҳо истифода мешаванд?

3. Аз рӯйи ду нуқта, ё якчанд нуқтаи дар як хати рост ҷойгирбуда ва ё як хати рост чандто ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст?

4. Бо кадом тарзҳо ҳамвориро яққимата муайян кардан мумкин аст?

5. Вазъияти ҷойгиршавии байниҳамдигарии ду хати рост ва ду ҳамворӣ чӣ гуна аст?

6. Кадом аксиома доир ба ҷойгиршавии байниҳамдигарии хати рост ва ҳамворӣ ҷавоб медиҳад?

Масъалаҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

14. Исбот кунед, ки аз рӯйи нуқтаи додашуда миқдори беохири ҳамвориҳоро гузаронидан мумкин аст.

15. Исбот кунед, ки барои ҳар гуна хати рост дар фазо хати рости онро буранда мавҷуд аст.

16. Барои ҳар гуна ҳамворӣ дар фазо хати рости онро буранда мавҷуд аст. Инро исбот кунед.

17. Барои ҳар гуна хати рост дар фазо ҳамвории онро буранда мавҷуд аст. Инро исбот кунед.

18. Исбот кунед, ки барои ҳар гуна ҳамворӣ дар фазо ҳамвории онро буранда мавҷуд мебошад.

19. Дар фазо нуқтаҳои A ва B дода шудаанд. Хати ростеро, ки аз рӯйи онҳо мегузарад, созед.

20. Маълум аст, ки ҳамвориҳои α ва β ҳамдигарро мебуранд. Хати буриши онҳоро созед.

21. Нуқтаҳои A, B, C дар ҳар як ду ҳамвории гуногун ҷойгиранд. Исбот кунед, ки ин нуқтаҳо дар як хати рост ҷойгиранд.

22. Тарафи BC-и секунҷаи ABC дар ҳамвории α ҷойгир аст. M ва N мувофиқан нуқтаҳои тарафҳои AB ва AC мебошанд. Нишон диҳед, ки агар M дар α ҷойгир набошад, он гоҳ N низ дар α ҷойгир нест.

23. Исбот кунед, ки аз рӯйи нуқтаи буриши ду хати рости додашуда хати рости сеюмро гузаронидан мумкин аст, ки бо онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир нест.

24. Се ҳамвории бо ҳамдигар ҷуфт-ҷуфт буридашаванда дода шудааст. Исбот кунед, ки агар ду хати буриши ин ҳамвориҳо бурида шаванд, он гоҳ хати сеюми буриш аз нуқтаи буриши онҳо мегузарад.

25. Нуқтаҳои *A, B, C* ва *D*, ки дар як ҳамворӣ воқеъ нестанд, дода шудаанд. Чанд ҳамвории гуногунро, ки аз рӯйи сетои ин нуқтаҳо мегузаранд, сохтан мумкин аст?

26. Чор нуқта, ки сетоаш дар як хати рост ҷойгир нест, дода шудааст. Исбот кунед, ки хати рости аз рӯйи ду нуқтаи дилхоҳи онҳо гузаранда бо хати росте, ки аз рӯйи ду нуқтаи дигараш мегузарад, буриш надорад.

27. Исбот кунед, ки дар фазо се нуқтае вуҷуд дорад, ки онҳо дар як хати рост ҷойгир нестанд.

28*. Исбот кунед, ки дар фазо чор нуқтае мавҷуд ҳаст, ки онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд.

29. Порчаҳои *AB, BC, CD, DA* дода шудаанд. Дар айни ҳол *M* нуқтаи буриши порчаҳои *AC* ва *BD* аст. Нишон диҳед, ки порчаҳои додашуда дар як ҳамворӣ ҷойгиранд.

30. Нуқтаҳои *A, B, C* дар як хати рост ҷойгир нестанд. Нуқтаҳои *D* ва *E* мувофиқан миёнаҷойи порчаҳои *AC* ва *BC* мебошанд. Исбот кунед, ки нуқтаҳои: 1) *A, B, D*; 2) *C, D, E;* 3) *A, D, E* дар як хати рост ҷойгир нестанд.

31. Маълум аст, ки нуқтаҳои *A, B, C, D* дар як ҳамворӣ чойгир нестанд. Исбот кунед, ки хатҳои рости *AB* ва *CD* ҳамдигарро намебуранд.

32*. Нуқтаҳои *A, B, C, D* дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд. Нуқтаҳои *K* ва *M* мувофиқан миёнаҷойи порчаҳои *AC* ва *BC* мебошанд. Исбот кунед, ки хатҳои рости: 1) *AC* ва *DK;* 2) *BD* ва *KM*; 3) *AD* ва *KM* ҳамдигарро намебуранд.

33. Исбот кунед, ки дар фазо ду хати росте мавҷуданд, ки онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд.

34*. Хати рост дар ҳамворӣ ҷойгир аст. Исбот кунед, ки чунин нуқтаҳои ҳамворӣ мавҷуданд, ки онҳо ба хати рост тааллуқ надоранд.

35. Ҳамвории α фазоро ба ду нимфазо ин тавр ҷудо мекунад: нуқтаи $A \notin \alpha$-ро интихоб мекунем. Ҳамаи нуқтаҳои X-и фазоро, ки барояшон хати рости AX ҳамворииро намебурад, ба нимфазои якум мансуб ҳисоб мекунем. Агар хати рости AX α-ро бурад, он гоҳ X-ро ба нимфазои дуюм мансуб медонем. Исбот кунед, ки агар ду нуқта ба як зерфазо тааллуқ дошта бошад, он гоҳ порчаи онҳоро пайвасткунанда ҳамвории α-ро намебурад. Агар нуқтаҳо ба зерфазоҳои гуногун тааллуқ дошта бошанд, он гоҳ ин порча ҳамвории α-ро мебурад.

Масъалаҳо барои такрор

36. Магар дар секунҷа медиана аз маркази давраи берункашида мегузарад?

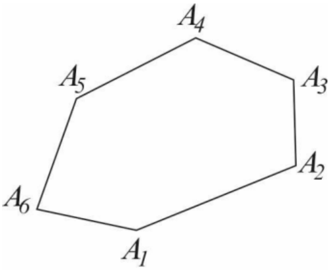
37. Исбот кунед, ки баландиҳои секунҷа h_a, h_b, h_c ва радиуси давраи дарункашидаи он r нобаробарии $h_a + h_b + h_c \geq 9r$ ро қаноат мекунонанд.

38. Исбот кунед, ки агар A,B кунҷҳои тези ΔABC ва $\sin A \sin B > \frac{1}{2}$ бошад, он гоҳ кунҷи C ҳам тез аст.

39. Яке аз кунҷҳои секунҷаи росткунҷа ба миёнаи арифметикии ду кунҷи дигар баробар аст. Катетҳои секунҷаро ёбед, агар гипотенузаи он c бошад.

40. Магар дар секунҷа ҳамеша дуто: а) баландӣ; б) медиана; в) биссектриса ҳамдигарро мебуранд?

3. Мисолҳои фигураҳои фазоӣ. Буришҳо



Расми 13

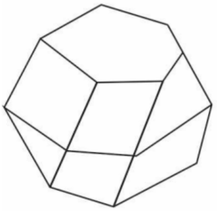
Тавре медонем, бисёркунҷаҳо, ки қисми ҳамвории бо порчаҳои хатҳои рост маҳдудгашта мебошанд, фигураҳои одитарини планиметрия ҳастанд.

Дар ин ҷо талаб карда мешавад, ки ин порчаҳои хатҳои рост ҳамдигарро намебуранд (расми 13).

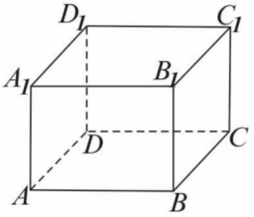
Масалан, секунҷа ва параллелограмм бисёркунҷа мебошанд.

Дар стереометрия фигураҳо дар фазо омӯхта мешаванд, ки онҳо ҷисмҳо ном доранд. Ҷисми геометриро ҳамчун қисми фазои бо ҷисми физикавӣ ҷудокардашуда ва сатҳи маҳдуддошта тасаввур кардан мумкин аст. Мисли бисёркунҷаҳо дар ҳаморӣ фигураҳои одитарин дар фазо бисёррӯяҳо мебошанд, ки сатҳи онҳо аз миқдори охирноки бисёркунҷаҳо иборат аст (расми 14). Шаклҳои бисёррӯя доштаро мо ҳар замон дида метавонем: қуттии гӯгирд, хона, китоб, бинои бисёрошёна мисоли бисёррӯяҳоанд. Пирамидаҳо (аҳром)-и Миср ё бурҷҳои Кремли Маскав низ мисоли бисёррӯяҳо мебошанд.

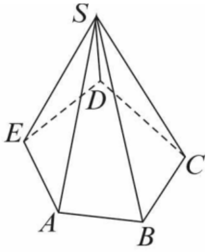
Аз миқдори зиёди бисёррӯяҳои гуногуншакл ҳоло танҳо бо мақсади васеъ кардани доираи масъалаҳое, ки мо дар оянда бо онҳо сару кор хоҳем дошт, баъзе маълумоти ибтидоиро дар бораи параллелепипед (расми 15) ва пирамида (расми 16) меорем.



Расми 14



Расми 15



Расми 16

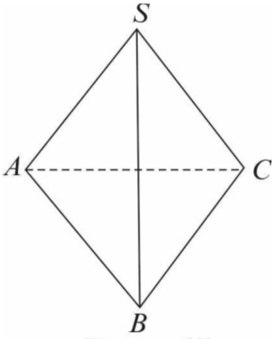
(Дар ин ҷо қайд карданро зарур медонем, ки ҷисмҳои геометрӣ, ки мо онҳоро дар оянда муфассал хоҳем омӯхт, танҳо бо бисёррӯяҳо маҳдуд намегарданд, балки ҷисмҳои чархзаниро низ дар бар мегиранд).

Ҳамин тариқ, *бисёррӯя* ҷисмест, ки сатҳи он аз шумораи охирноки бисёркунҷаҳо иборат аст. Агар бисёррӯя дар як тарафи ҳамвории ҳар як бисёркунҷаи ҳамвори дар сатҳи он буда ҷойгир бошад, вай *барҷаста* ном дорад. Қисми умумии ин ҳамворӣ ва сатҳи бисёррӯяи барҷаста *рӯя* номида мешавад. Тарафи рӯяҳо *теғаҳо,* қуллаи рӯяҳо *қуллаҳои бисёррӯя* ном доранд.

Параллелепипед бисёррӯяест, ки рӯяҳояш аз параллелограммҳо иборат аст (расми 15). Параллелепипед 6 рӯя, 12 теға ва 8 қулла дорад. Агар ҳамаи рӯяҳо росткунҷа бошанд, он гоҳ параллелепипед *параллелепипеди росткунҷа* номида мешавад. Агар дар параллелепипеди росткунҷа ҳамаи теғаҳои паҳлуӣ баробар бошанд, вай *куб* ном дорад. Дар расми 15 параллелепипеди росткунҷаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ оварда шудааст (ABB_1A_1, ADD_1A_1, ... - рӯяҳо; AA_1, BB_1, ... - теғаҳо; A, A_1, ... - қуллаҳо). Қуттиҳои ҳархела, хонаҳо, биноҳо ва ғайра мисоли параллелепипеди росткунҷаанд.

Бисёррӯяе, ки дар натиҷаи нуқтаи додашударо бо нуқтаҳои бисёркунҷаи ҳамвор пайваст кардан ҳосил мешавад, *пирамида* ном дорад. Нуқтаи додашуда *қуллаи пирамида*, бисёркунҷаи ҳамвор *асоси пирамида* номида мешавад. Сатҳи пирамида аз асос ва рӯяҳои паҳлуӣ, ки секунҷаҳоанд, иборат аст. Хатҳое, ки қуллаи пирамидаро бо қуллаҳои асос пайваст мекунанд, *теғаҳои паҳлуӣ* ном доранд. Агар асоси пирамида n-кунҷа бошад, пирамидаро пирамидаи n-кунҷа меноманд. Дар расми 16 пирамидаи 5-кунҷа тасвир шудааст.

Панҷкунҷаи $ABCDE$ асос, S қулла, SA, SB,...,SE теғаҳои паҳлуии он аст. Рӯяҳои паҳлуӣ секунҷаҳои ASB, BSC,..., ESA мебошанд. Агар асоси пирамида бисёркунҷаи мунтазам буда, баландиаш аз маркази ин бисёркунҷа гузарад, он гоҳ онро *пирамидаи мунтазам* меноманд. Агар асоси пирамида секунҷа бошад, онро *тетраэдр* мегӯянд (аз ду калимаи юнонии *tetra* - чор ва *hedra* - асос, рӯя тартиб дода шуда, маънояш чоррӯя аст). Тетраэдр дорои 4 рӯя ва 6 теғаю 4 қулла мебошад (расми 17). Агар ҳамаи теғаҳо баробар бошанд, он гоҳ тетраэдрро тетраэдри мунтазам меноманд.



Расми 17

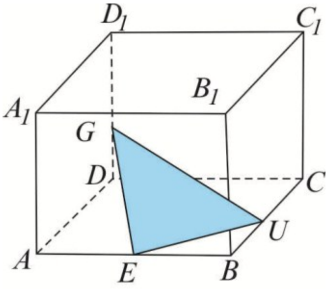
Акнун мафҳуми буриши бисёррӯяро бо ҳамворӣ дар фазо муайян мекунем. Бигузор ҳамвории α дода шудааст. Ин ҳамворӣ фазоро ба ду нимфазо, бо ҳамон маъное, ки дар шарти масъалаи 35 оварда шудааст, ҷудо мекунад.

Таъриф. Агар ақаллан ду нуқтаи бисёррӯя дар нимфазоҳои гуногун ҷойгир бошанд, он гоҳ мегӯянд, ки ҳамвории α бисёррӯяро мебурад.

Дар ин ҳолат α ҳамвории буранда ном дорад. Фигурае, ки ҳар як нуқтаи он ба бисёррӯя ва ҳамвории буранда тааллуқ дорад, *буриши бисёррӯя* бо ҳамвории α ё кӯтоҳ *буриш* номида мешавад.

Ду масъалаи бо буришҳо алоқамандро ҳал мекунем.

Масъалаи 1.Буриши параллелепипеди $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - ро бо ҳамворӣ, ки аз миёнаҷойи теғаҳои AB, BC ва DD_1 мегузарад, месозем.



Расми 18

Ҳал. Миёнаҷойи теғаҳоро бо *E, U, G* ишорат мекунем. Ин нуқтаҳо дар як хати рост ҷойгир нестанд. Мувофиқи теоремаи 2 аз рӯйи онҳо як ҳамвории α мегузарад (расми 18).

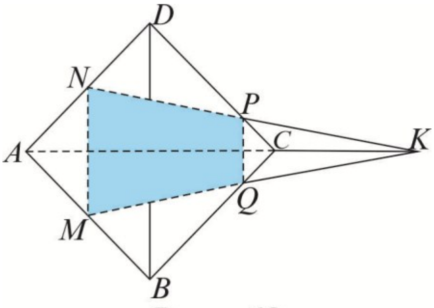
Нуқтаҳои *E,U* ба ҳамвории *ABC* ва ҳамвории бурандаи α тааллуқ доранд. Пас, тамоми хати рости *EU* ба α тааллуқ дорад, яъне *EU* хати буриши α бо ҳамвории *ABC* аст.

Акнун ҳамвории аз рӯйи нуқтаҳои *G,D,E* гузарандаро дида мебароем.

Ин ҳамворӣ ҳамвории α-ро аз рӯйи хати рости *GE* мебурад. Порчаи *GE* қисми умумии ин ду ҳамворӣ ва параллелепипед мебошад. Нисбат ба нуқтаҳои *D,G,U* низ ҳамин тавр мулоҳиза ронда, ҳосил мекунем, ки секунҷаи *EUG* буриши матлуб аст. Масъала ҳал шуд.

Масъалаи 2. Дар теғаҳои *AB, AD, CD*-и тетраэдри *ABCD* мувофиқан нуқтаҳои *M,N,P* чунон гирифта шудаанд, ки хатҳои рости *NP* ва *AC* параллел нестанд (расми 19). Буриши ин тетраэдрро бо ҳамворие, ки аз рӯйи ин се нуқта мегузарад, месозем.

Ҳал. Ҳамвории аз рӯйи нуқтаҳои M,N ва P гузарандаро бо α ишорат мекунем. Ин ҳамворӣ бо ҳамвории DAC нуқтаҳои умумии N ва P-ро дорост, барои ҳамин мувофиқи аксиомаи C_4 хати рости NP буриши онҳост.

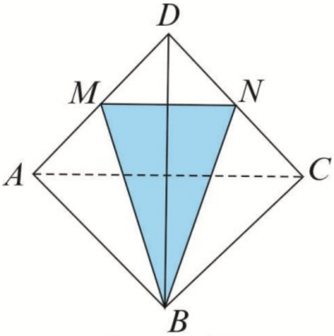


Расми 19

Айнан ҳамин тавр муқаррар мекунем, ки порчаи NM буриши α бо рӯяи ADB аст. Нуқтаи M ба ҳамвории α ва ҳамвории ABC тааллуқ дорад. Барои сохтани хати буриши ин ду ҳамворӣ бояд боз як нуқтаи умумии онҳоро ёбем. Бигузор K нуқтаи буриши хати рости NP ва AC аст.

Хати рости MK-ро сохта мебинем, ки он теғаи BC-ро дар нуқтаи Q мебурад. Фаҳмост, ки нуқтаи Q ҳам ба α ва ҳам ба ҳамвории ABC тааллуқ дорад, яъне MQ хати буриши α ва рӯяи ABC аст. Буриши матлуб чоркунҷаи $MNPQ$ мебошад.

Баъзан дар масъалаҳо ғайри ёфтани буриш боз ҳисоби масоҳат ё периметри он талаб карда мешавад.



Расми 20

Масъалаи 3. Тетраэдри мунтазами ABCD, ки теғааш a аст, дода шудааст. Аз қуллаи B ва миёнаҷойи теғаҳои AD, DC ҳамворӣ гузаронида шудааст. Периметри фигураеро, ки дар буриш ҳосил мешавад, меёбем.

Ҳал. Бо осонӣ дида мешавад, ки буриши матлуб секунҷаи *MNB* аст (расми 20). Мувофиқи шарти масъала:

1) $AD = DC = AB = AC = BC = a$;

2) $AM = MD = DN = NC = \frac{a}{2}$.

Ёфтани $p = MN + MB + BN$ талаб карда мешавад. *MN* хати миёнаи ΔADC аст. Дар асоси хосияти хати миёна секунҷа ҳосил мекунем: $MN = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$.

Дар тетраэдр рӯяҳои паҳлуӣ секунҷаҳои баробартарафанд, барои ҳамин медианаи *BM*-и ΔADB баландӣ аст, яъне ΔAMB росткунҷа мебошад.

Пас, мувофиқи теоремаи Пифагор пайдо мекунем:

$$AB^2 = AM^2 + MB^2,\ a^2 = \frac{a^2}{4} + MB^2.$$

Аз ин ҷо:

$$MB^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \text{ ва } MB = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Вале *BM*=*NB*, чунки ΔMBN баробарпаҳлу аст.

Ҳамин тариқ,

$$p = MN + 2BM = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = a\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right).$$

Саволу супоришҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Бисёррӯя чист?

2. Рӯя, теға ва қуллаи бисёррӯя чиҳоянд?

3.Таърифи параллелепипеди росткунҷа (куб) ва пирамидаро (тетраэдрро) оред.

4. Чӣ гуна ҳамворӣ буранда номида мешавад?

5. Кадом фигура буриш ном дорад?

6. Оё буриш ҳамвор набуда метавонад?

Масъалаҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

41. Бигузор $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеди росткунҷа аст. Исбот кунед, ки:

а) нуқтаи A_1 ба ҳамвории рӯяи $ABCD$ тааллуқ надорад;

б) хатҳои рости AB_1 ва AC_1 ҳамвории рӯяи $ABCD$-ро мебуранд;

в) ҳамвориҳои $ABCD$, ABB_1A_1 BCC_1B_1 ҷуфт-ҷуфт ҳамдигарро мебуранд;

г) хати рости A_1B_1 ҳамвории $ABCD$ - ро намебурад;

д) ҳамвориҳои $ABCD$ ва $A_1B_1C_1D_1$ ҳамдигарро намебуранд;

е) хати рости A_1C_1 ҳамвории $ABCD$ - ро намебурад;

ж) нуқтаҳои: 1) A, B, C_1, 2) A_1, B_1, C дар як хати рост ҷойгир нестанд;

з) нуқтаҳои: 1) A,B,C,C_1, 2) A,B,C,D_1 дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд;

и) агар K ва M миёнаҷойи теғаҳои AB ва BC бошанд, он гоҳ нуқтаҳои K, M, A, C дар як ҳамворӣ ҷойгиранд.

42. Буриши параллелепипеди росткунҷаи ABCD $A_1B_1C_1D_1$- ро бо ҳамворие, ки аз рӯйи нуқтаҳои:
1) $A_1B_1D_1$, 2) A_1C ва миёнаҷойи теғаи DD_1 мегузарад, созед.

43. Буриши параллелепипеди росткунҷаро бо ҳамворие, ки аз рӯйи ду теғаи паҳлуии ба як рӯя тааллуқ надошта мегузарад созед.

44. Нуқтаи E дар ҳамвории $A_1B_1C_1D_1$, хати рости *a* дар ҳамвории ABCD ҷойгиранд. Буриши параллелепипеди росткунҷаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ро бо ҳамворие, ки аз рӯйи хати рости *a* ва нуқтаи E мегузарад, созед.

45. Нишон диҳед, ки буриши пирамида бо ҳамвориҳое, ки аз қуллаи он мегузаранд, секунҷаҳо мебошанд.

46. Буриши пирамидаро бо ҳамворие, ки аз қуллаи он ва ду нуқтаи додашудаи асос мегузарад, созед.

47. Буриши пирамидаи секунҷаро бо ҳамворие, ки аз рӯйи тарафи асоси пирамида ва нуқтаи додашудаи теғаи муқобили ин тараф мегузарад, созед.

48. Буриши пирамидаи чоркунҷаро бо ҳамворие, ки аз рӯйи тарафи асос ва нуқтаи яке аз теғаҳои паҳлуӣ мегузарад, созед.

49. Дарозии теғаи куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ба *a* баробар аст. Масоҳати буриши кубро бо ҳамворие, ки аз миёнаҷойи теғаҳои AB, BB_1 ва BC мегузарад, ёбед.

50. Дарозии теғаи тетраэдри мунтазам ба *a* баробар аст. Буриши тетраэдрро бо ҳамворие, ки аз миёнаҷойи се теғаи аз як қулла фуровардашуда мегузарад, созед. Периметр ва масоҳати буришро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

51. Порчаҳои AB ва AC ҳамвории α-ро мебуранд. Порчаи BC ҳамвории α - ро мебурад?

52. Дар давраи радиусаш 8 см хордаҳои ба ҳам перпендикуляри AB ва CD гузаронида шудаанд. Диаметрҳое, ки аз охирҳои хордаи AB гузаронида шудаанд, CD-ро ба се ҳиссаи баробар ҷудо мекунанд. Маълум аст, ки $AB =$ 12 см мебошад. Дарозии хордаи CD-ро ёбед.

53. Маълум аст, ки диагоналҳои ду квадрат ба ҳамдигар баробаранд. Магар ин квадратҳо бо ҳам баробаранд?

§2. ҶОЙГИРШАВИИ БАЙНИҲАМДИГАРИИ ХАТҲОИ РОСТ ВА ҲАМВОРИҲО

4. Ҷойгиршавии байниҳамдигарии ду хати рост. Хатҳои рости чиликӣ

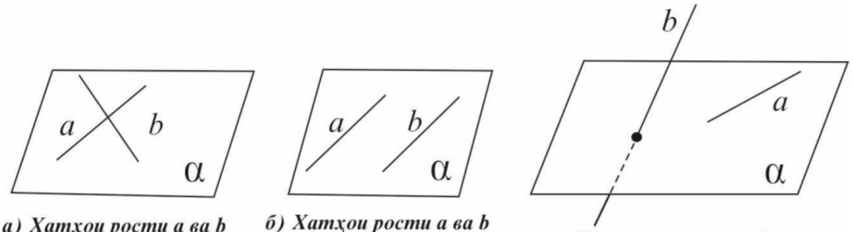
Дар зерпункти II - и пункти 2 ҳамчун натиҷаҳои аксиомаҳо мо муқаррар кардем, ки дар фазо ду хати рости гуногуни a ва b ё ҳамдигарро мебуранд (дар як нуқта) ё нуқтаҳои умумӣ надоранд. Дар стереометрия ҳолати дуюм, бар хилофи планиметрия, ки дар он хатҳои рост параллел номида шуда буданд, ба ду зерҳолат ҷудо мешавад: хатҳои рост дар як ҳамворӣ ҷойгиранд ва хатҳои рост дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд.

Дар алоқамандӣ бо ҳамин таърифҳои зеринро дохил мекунем.

Таърифи 1. Ду хати рост дар фазо *параллел* номида мешаванд, агар онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир буда, ҳамдигарро набуранд.

Таърифи 2. Хатҳои росте, ки ҳамдигарро намебуранд ва дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд, *чиликӣ* ном доранд.

Ҳар се ҳолати ҷойгиршавии хатҳои рост дар расми 21 нишон дода шудааст.



а) Хатҳои рости a ва b ҳамдигарро мебуранд

б) Хатҳои рости a ва b параллел мебошанд

в) Хатҳои рости a ва b чиликӣ мебошанд

Расми 21

Дар муҳити атрофи мо мисолҳои бисёре овардан мумкин аст, ки ҳамаи ин ҳолатҳоро онҳо акс мекунанд. Масалан, хатҳои буриши фарш ва шифти хона бо девор доир ба хатҳои параллел тасаввурот медиҳанд. Роҳи аз зери пул (кӯпрук) гузаранда ва роҳи болои пул (кӯпрук) тарҳи (шабеҳи) хатҳои чиликианд.

Хатҳои рости параллелро алоҳида дида мебароем. Ҳоло ба муоинаи хатҳои рости чиликӣ машғул мешавем. Мувофиқи теоремаи 2 мебинем, ки хатҳои рости *a* ва *b* чиликӣ мешаванд, агар онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир набошанд (Дар таърифи хатҳои чиликӣ талаби ҳамдигарро набуридани онҳо зиёдатӣ аст!). Тасдиқи «хатҳои рости *a* ва *b* дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд» маънои онро дорад, ки ҳамворие мавҷуд нест, ки дар он ҳам *a* ва ҳам *b* ҷойгир бошанд.

Дар айни ҳол шумораи беохири ҳамвориҳо мавҷуданд, ки дар алоҳидагӣ ҳар кадоми ин хатҳои рост дар онҳо ҷойгир мебошанд (ниг. ба эзоҳи 1-и қисми II-и пункти 2).

Барои мустаҳкам кардани таърифи хатҳои рости чиликӣ масъалаи содаи зеринро ҳал мекунем.

Масъала. Исбот мекунем, ки агар хатҳои рости *a* ва *b* ҳамдигарро буранд, он гоҳ ҳар гуна ду хати рости онҳоро буранда чиликӣ шуда наметавонанд.

Ҳал. Бигузор *A,B* аз *a* ва *C,D* аз *b* нуқтаҳои буриши хатҳои ростанд. Мувофиқи теоремаи 2 як ҳамвории α мавҷуд аст, ки дар он *a* ва *b* ҷойгиранд. Пас, нуқтаҳои *A,B, C, D* дар ҳамвории α ҷойгиранд. Аз рӯйи аксиомаи Сз хатҳои рости *AC* ва *BD* дар ҳамвории α ҷойгиранд, яъне чиликӣ нестанд.

Эзоҳ. Агар яке аз хатҳои рост аз нуқтаи буриши хатҳои рости *a* ва *b* гузарад, он гоҳ тасдиқи масъалаи 1 нодуруст аст (Инро мустақилона исбот кунед).

Акнун аломатҳои чиликӣ будани хатҳои ростро дар фазо меорем.

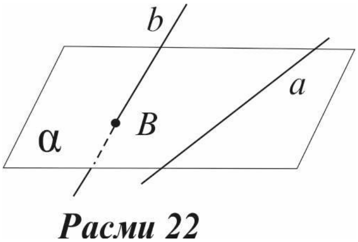
Аломати якум. *Агар нуқтаҳои A,B,C,D дар як ҳамворӣ ҷойгир набошанд, он гоҳ хатҳои рости AB ва CD чиликианд.*

Дар ҳақиқат, агар хатҳои рост чиликӣ набошанд, он гоҳ онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир мешаванд. Пас, нуқтаҳои *A,B,C,D* низ дар як ҳамворӣ ҷойгир мешуданд, ки ин ба шарт зид аст.

Натиҷаи 1. *Барои он ки чор нуқта - A,B,C,D дар як ҳамворӣ ҷойгир бошанд, зарур ва кифоя аст, ки хатҳои рости AB ва CD ё ҳамдигарро буранд, ё ки параллел бошанд ва ё ҳамҷоя шаванд.*

Аломати дуюм. *Агар яке аз ду хати рост дар ҳамворӣ ҷойгир бошаду дигарӣ ҳамвориро дар нуқтае бурад, ки он ба хати рости якум тааллуқ надошта бошад, он гоҳ ин хатҳо чиликианд.*

Бугузор *a* хати рости дар ҳамвории α ҷойгирбуда, *B* нуқтаи буриши хати рости *b* бо ин ҳамворӣ аст ва *B* ба *a* тааллуқ надорад (расми 22).



Расми 22

Фарз мекунем, ки хатҳои рости *a* ва *b* чиликӣ нестанд, яъне ҳамвории дигар β вуҷуд дорад, ки ин хатҳоро дар бар мегирад. Пас, *a* ва *B* дар β ҷойгиранд. Мувофиқи теоремаи 1 ҳамвориҳои α ва β ҳамҷояанд. Вале α хати *b*-ро дар бар намегирад, пас β низ ин хатро дар бар гирифта наметавонад. Инак, ҳамворие мавҷуд нест, ки ҳар ду хатро дар бар гирад. Ин аз чиликӣ будани онҳо шаҳодат медиҳад.

Натиҷаи 2. *Барои ҳар гуна хати рост дар фазо хати рости ба он чиликӣ вуҷуд дорад.*

Барои исботи ин натиҷа нуқтаи B-ро берун аз хати рости a мегирем ва аз рӯйи a ва B мувофиқи теоремаи 1 ҳамвории α-ро мегузаронем. Баъд, берун аз a ягон нуқтаи C-ро интихоб карда, хати рости b-ро аз рӯйи нуқтаҳои B ва C мегузаронем. Мулоҳизарониҳои минбаъда айнан мисли асосноккунии аломати дуюми хатҳои чиликӣ, ки дар боло оварда шудааст, мебошанд.

Саволу супоришҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Ду хати рост дар фазо байни ҳамдигар чӣ тавр ҷойгир шуда метавонанд?

2. Дар кадом ҳолат хатҳои рост дар фазо параллел номида мешаванд?

3. Дар кадом ҳолат хатҳои рост дар фазо чиликӣ ном доранд?

4. Аломатҳои чиликӣ будани хатҳои ростро дар фазо оред ва онҳоро асоснок кунед.

5. Барои хати рости додашуда хати рости ба он чиликиро созед.

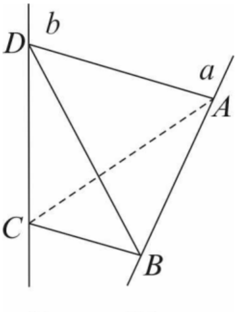
6. Оё барои хати рости дилхоҳ дар фазо хати рости ба он чиликӣ вуҷуд дорад?

Масъалаҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

54. Исбот кунед, ки агар хатҳои рости *AB* ва *CD* чиликӣ бошанд, он гоҳ хатҳои рости *AC* ва *BD* низ чиликианд.

55. Магар аз рӯйи нуқтаи *C*, ки ба хатҳои рости чиликии *a* ва *b* тааллуқ надорад, ду хати рости гуногун гузаронидан мумкин аст, ки ҳар кадоми онҳо хатҳои рости *a* ва *b*-ро буранд?

56. Ду хати рости чиликии *a* ва *b* ва нуқтаи *C*, ки дар ягонтои ин хатҳо ҷойгир нест, дода шудаанд. Оё аз нуқтаи *C* хати ростеро гузаронидан мумкин аст, ки вай ҳар дуи ин хатҳои рости *a* ва *в*-ро бурад?



Расми 23

57. Исбот кунед, ки хатҳои рости теғаҳои муқобилро дарбаргиранда, масалан, *AB* ва *CD*-и ҳар гуна тетраэдр чиликианд (расми 23). Боз кадом хатҳои рости чиликиро дар расми 23 нишон додан мумкин аст?

58. Бигузор *K* ва *M* миёнаҷойи теғаҳои *A B* ва *CD*-и тетраэдри *ABCD* бошанд. Исбот кунед, ки хатҳои рости *AC* ва *KM* чиликианд.

59. Нуқтаҳои K_1M_1P миёнаҷойи теғаҳои *AB, BC, CA*-и тетраэдри *ABCD*-анд. Исбот кунед, ки хатҳои рости *KP* ва *DM* чиликӣ мебошанд.

60. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - параллелепипеди росткунҷа. Исбот кунед, ки хатҳои рости: 1) *AB* ва CC_1; 2) *AB* ва B_1C_1, 3) *AC* ва BB_1, 4) *AC* ва BD_1; 5) *AC* ва *BC*; 6) AB_1 ва BC_1 чиликианд.

61. Исбот кунед, ки барои ҳар гуна ду хати рости чиликии a ва b дар фазо хати рости сеюм c вуҷуд дорад, ки ҳам бо a ва ҳам бо b чиликӣ мебошад.

62. Исбот кунед, ки барои ҳар гуна ду хати рости ҳамдигарро бурандаи a ва b дар фазо хати росте вуҷуд дорад, ки ҳам бо a ва ҳам бо b чиликӣ аст.

Масъалаҳо барои такрор

63. Нишон диҳед, ки ҳар гуна буриши бисёррӯя бо ҳамворӣ бисёркунҷа мебошад.

64. Ду ҳамворие, ки ҳамдигарро намебуранд, дода шудаанд. Исбот кунед, ки агар хати рост яке аз ин ҳамвориҳоро бурад, он гоҳ дигариро низ мебурад.

65. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ва сатҳи пурраи кубе, ки теғааш 4 см аст, ба чӣ баробар аст?

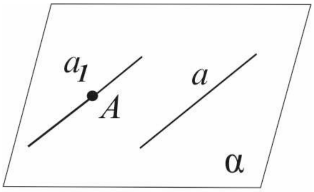
66. Масоҳати сатҳи паҳлуӣ ва пурраи параллелепипеди росткунҷаи асосаш квадратро ёбед, агар тарафи квадрати асос 5 см ва баландӣ 10 см бошад.

67. Кунҷҳои α, β ва масоҳати секунҷаи ABC, ки S аст, дода шудаанд. Тарафҳои секунҷаро ёбед.

5. Параллелии хатҳои рост дар фазо

I. Тавре дар пункти пешина таъриф дода будем, ду хати рост дар фазо *параллел* номида мешаванд, агар онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир буда, ҳамдигарро набуранд. Натиҷаҳои заруриро аз планиметрия хотирнишон карда, теоремаи фазогиро доир ба параллелҳо меорем. Дар натиҷа боз як тарзи ҳосил кардани ҳамвориро доро мешавем. Аз планиметрия мо медонем, ки ҷойгиршавии байниҳамдигарии ду хати рост дар ҳамворӣ чунин аст: ё хатҳои рост ҳамдигарро мебуранд, яъне якто нуқтаи умумӣ доранд (аксиомаи P_1), ё онҳо параллеланд, яъне ҳамдигарро намебуранд. Баъд, мувофиқи аксиомаи параллелӣ (хосияти асосии хатҳои рости параллел): *аз нуқтае, ки дар хати рости додашуда ҷойгир нест, на зиёда аз як хати рости ба хати рости додашуда параллел гузаронидан мумкин аст.* Дар планиметрия ин аксиомаро истифода карда, мо теоремаро доир ба параллелҳо исбот карда будем: *аз нуқтаи А, ки дар хати рости а ҷойгир нест, хати рости ба а параллел гузаронидан мумкин аст ва фақат якто.* Дар стереометрия аксиомаи параллелӣ дар ҳар як ҳамворӣ ҷой дорад, бинобар ин *теоремаи фазоӣ доир ба параллелҳо* дуруст аст. Ин теорема қиёси теоремаи планиметрии дар боло овардашуда мебошад.

Теоремаи 3. *Аз нуқтаи берунаи хати рости додашуда хати рости ба ин хати рост параллелро гузаронидан мумкин аст ва дар айни ҳол фақат якто.*



Расми 24

Исбот. Бигузор a хати рости додашуда ва A нуқтаи дар он ҷойгирнабуда аст (расми 24). Аз рӯйи хати рости a ва нуқтаи A ҳамвории α-ро мегузаронем (теоремаи 1). Дар ҳамвории α аз нуқтаи A хати рости a_1-ро, ки ба a параллел аст, мегузаронем.

Мувофиқи теоремаи планиметрия доир ба хатҳои рости параллел чунин хати рости a_1 ягона мебошад. Теорема исбот шуд.

Эзоҳ. То ҳол ба мо се тарзи дода шудани ҳамворӣ маълум буд: бо се нуқтаи дар як хати рост ҷойгирнабуда (аксиомаи C_2); бо хати рост ва нуқтаи дар он ҷойгирнабуда (теоремаи 1); бо ду хати рости ҳамдигарро буранда (теоремаи 2). Мо ҳозир тарзи чоруми дода шудани ҳамвориро ҳосил кардаем: *ду хати рости параллел ҳамвориро ба таври ягона муайян мекунанд*. Ин бевосита аз таърифи параллелӣ дар фазо бармеояд. Ин эзоҳро баъди таърифи параллелии хатҳои рост дар фазо дар пункти 4 ҳам овардан мумкин буд.

Масъалаи 1. Ду хати рости параллел дода шудаанд. Маълум, ки хати рости сеюм онҳоро мебурад. Нишон медиҳем, ки ҳар се хати рост дар як ҳамворӣ мехобанд.

Ҳал. Бигзор α ҳамвориест, ки онро ин ду хати рости параллел яккимата муайян мекунанд. Хати рости ин хатҳоро буранда бо α ду нуқтаи умумӣ дорад, ки онҳо нуқтаҳои буришанд. Пас, мувофиқи аксиомаи C_3 ҳамвории α ин хати ростро дар бар мегирад.

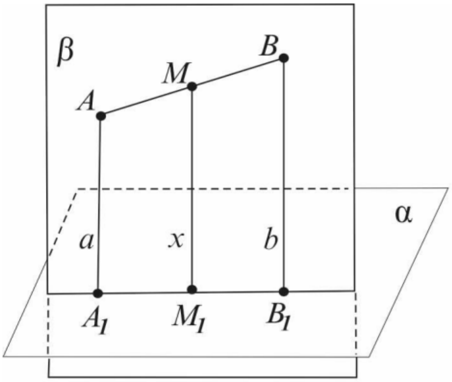
Хулоса. *Агар хатҳои рости a ва b якдигарро буранд, он гоҳ ҳамаи хатҳои росте, ки ба хати рости b параллеланд ва хати рости a-ро мебуранд, дар як ҳамворӣ ҷойгиранд.*

Акнун ду масъаларо ҳал мекунем, ки дар онҳо услуби умдаи ҳалли масъалаҳои стереометрӣ - ба масъалаҳои планиметрӣ овардани онҳо истифода карда мешавад.

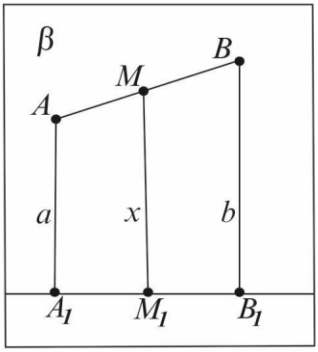
Масъалаи 2. Аз охирҳои порчаи AB ва миёнаҷойи он M хатҳои рости параллел гузаронида шудаанд, ки онҳо ҳамвории α-ро дар нуқтаҳои A_1, B_1 ва M_1 мебуранд.

Дарозии порчаи MM_1-ро меёбем, агар маълум бошад, ки порчаи AB ҳамвории α-ро намебурад, $AA_1 = 4$ м ва $BB_1 = 6$ м аст.

Ҳал. Мувофиқи хулосаи масъалаи 1 хатҳои рости AA_1, BB_1 ва MM_1 дар як ҳамвории β ҷойгиранд. Барои ҳамин нуқтаҳои A_1, B_1 ва M_1 дар хати рости A_1B_1, ки хати буриши ҳамвориҳои α ва β аст, ҷойгиранд (расми 25).



Расми 25

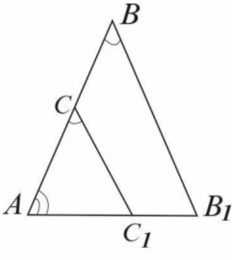


Расми 26

Ҳамин тариқ, муоинаи нақша дар ҳамвории β кифоя аст (расми 26). Мувофиқи теоремаи Фалес M_1 миёнаҷойи порчаи A_1B_1 аст. Яъне MM_1 хати миёнаи трапетсияи AA_1B_1B мебошад. Пас, дар асоси теорема дар бораи хати миёна, ҳосил мекунем:

$$MM_1 = x = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}(4 + 6) = 5\text{м}.$$

Масъалаи 3. Аз охири *A*-и порчаи *AB* ҳамвории α гузаронида шудааст. Аз охири *B* ва нуқтаи *C*-и ҳамин порча хатҳои рости параллел гузаронида шудаанд, ки онҳо ҳамвориро дар нуқтаҳои B_1 ва C_1 мебуранд. Дарозии порчаи BB_1-ро меёбем, агар CC_1= 6 см ва AB:AC=7:4 бошад.



Расми 27

Ҳал. Ҳамвории β, ки аз рӯйи хатҳои рости параллели BB_1 ва CC_1 мегузарад, хати рости AB-ро дар бар мегирад (хулосаи масъалаи 1) ва ҳамвории α-ро аз рӯйи хати рости AB_1 мебурад (расми 27).

Дар ҳамвории β ду секунҷаи ACC_1 ва ABB_1-и монанд ҳосил мешавад (кунҷи A умумӣ буда, баробарии кунҷҳои C ва B аз параллелии хатҳои рости CC_1 ва BB_1 бармеояд).

Пас, $\frac{BB_1}{CC_1}=\frac{AB}{AC}$, яъне $BB_1=CC_1\frac{AB}{AC}=6\cdot\frac{7}{4}=10{,}5см$.

II. Аломати параллелии хатҳои ростро дар фазо дида мебароем. Масъалаи чӣ тавр муқаррар кардани параллелии ду хати ростро дар фазо мегузорем: *исбот кардан лозим аст, ки хатҳои рост дар як ҳамворӣ ҷойгиранд ва ҳамдигарро намебуранд.*

Масъалаи ҳамдигарро набуридани ду хати рост дар ҳамворӣ дар асоси аломатҳои параллелӣ, яъне теоремаҳое, ки шартҳои кифоягии параллелиро муайян мекарданд, ҳал шуда буд. Дар планиметрия мо се аломати параллелии хатҳои ростро дар ҳамворӣ доштем: аз рӯйи баробарии кунҷҳои дарунии чиликии байни хатҳои рост ва хати рости онҳоро буранда; аз рӯйи ба 180° баробар будани суммаи кунҷҳои дарунии яктарафа; аз рӯйи параллелӣ ба хати рости сеюм. Ду аломати параллелии аввала дар фазо ба худ монандро надоранд. Аломати охирин бошад, дар фазо ҳам дуруст аст.

Теоремаи 4. *Ду хати росте, ки ба хати рости сеюм параллел мебошанд, параллеланд.*

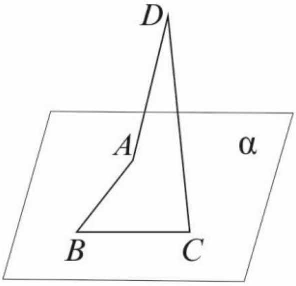
Ҳангоми дар як ҳамворӣ ҷойгир будани ҳар сеи ин хатҳои рост ин теорема дар планиметрия исбот карда шуда буд.

Исботро ҳангоми дар як ҳамворӣ ҷойгир набудани ин хатҳо муваққатан мавқуф мегузорем (бо мақсади сода кардани он).

Акнун ду масъалаи содаро меорем, ки дар ҳалли онҳо теоремаи 4 истифода мешавад.

Масъалаи 4. Исбот мекунем, ки ба ду хати рости дар як хамворӣ ҷойгирнабуда хати рости ба онҳо параллел гузаронидан мумкин нест.

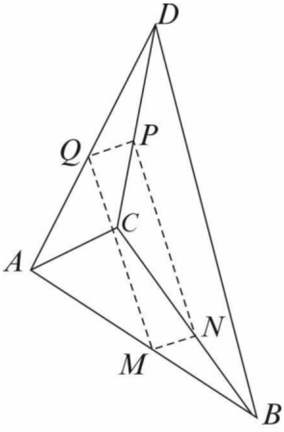
Ҳал. Агар мумкин мебуд, он гоҳ мувофиқи теоремаи 4 ин ду хати рост ба ҳам параллел мебуданд. Пас онҳо дар як ҳамворӣ ҷойгир мешуданд, ки ин ба шарти масъала зид аст.



Расми 28

Пеш аз овардани шартҳои масъалаи навбатӣ мафҳуми чоркунҷаи фазоӣ ё чиликиро дохил мекунем. Бигузор A, B, C се нуқтаи дар як хати рост ҷойгирнабуда мебошанд.

Онҳо мувофиқи аксиомаи C_2 ҳамвории α-ро муайян мекунанд. Бигузор D нуқтаи дар α ҷойгирнабуда аст (аксиомаи C_1) (расми 28). Ин чор нуқта дар як ҳамворӣ намехобанд. Фигураи сарбастае, ки порчаҳои *AB, BC, CD* ва *DA* — тарафҳои он мебошанд, чоркунҷаи фазоӣ ё чоркунҷаи чиликӣ номида мешавад.



Расми 29

Масъалаи 5. Чоркунҷаи фазогии *ABCD* дода шудааст (расми 29). Нишон медиҳем, ки миёнаҷойи тарафҳои он қуллаҳои параллелограмм мебошанд.

Ҳал. Бигузор нуқтаҳои M, N, P, Q мувофиқан миёнаҷойи тарафҳои AB, BC, CD ва DA ҳастанд. Дар секунҷаҳои DAC ва BAC, QP ва MN ҳамчун хатҳои миёнаи ин секунҷаҳо ба тарафи AC параллеланд. Пас мувофиқи теоремаи 4 QP ба MN параллел мебошад. Инчунин

$QP = \frac{AC}{2}$ ва $MN = \frac{AC}{2}$, яъне $QP{=}MN$ аст. Агар чунин мулоҳизарониҳоро нисбат ба секунҷаҳои *ABD* ва *BCD* гузаронем, он гоҳ ҳосил мекунем, ки QM ба PN параллел буда, QP = MN мебошад. Параллелограмм будани чоркунҷаи QPMN нишон дода шудааст.

Саволу супоришҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Аксиомаро доир ба хатҳои рости параллел ва теоремаро доир ба хатҳои рости параллел дар ҳамворӣ баён кунед. Байни онҳо чӣ гуна фарқ ҳаст?

2. Теоремаро доир ба хатҳои рости параллел дар фазо баён кунед. Кадом аксиома ва теоремаҳо барои исботи он истифода карда мешаванд?

3. Параллелии хатҳои рост дар фазо чӣ хел дохил карда мешавад?

4. Аломати параллелии хатҳои ростро дар фазо баён кунед.

Масъалаҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

68. Ҳамаи хатҳои рост, ки ду хати рости додашудаи параллелро мебуранд, дар як ҳамворӣ ҷойгиранд. Инро исбот кунед.

69. Агар ҳамворӣ яке аз хатҳои рости параллелро бурад, он гоҳ вай хати рости дигариро ҳам мебурад. Инро исбот кунед.

70. Нуқтаҳои *A,B,C,D* дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд. Оё хатҳои рости *AB* ва *CD* ҳамдигарро бурида метавонанд?

71. Нуқтаи Е дар ҳамвории трапетсияи *ABCD*-и асосҳояш *AD* ва ВС ҷойгир нест. Исбот кунед, ки хати рости аз миёнаҷойи порчаҳои ЕВ ва ЕС гузаронидашуда ба хати миёнаи трапетсия параллел аст.

72. Нуқтаи Е дар ҳамвории параллелограмми *ABCD* ҷойгир нест. Исбот кунед, ки хати рости аз миёнаҷойи порчаҳои ЕА ва ЕВ гузаронидашуда ба тарафи CD-и параллелограмм параллел аст.

73. Аз охирҳои порчаи АВ ва миёнаҷойи он М хатҳои рости параллел гузаронида шудаанд, ки онҳо ҳамвории α -ро дар нуқтаҳои A_1, B_1 ва M_1 мебуранд. Дарозии порчаи MM_1-ро ёбед, агар маълум бошад, ки порчаи АВ ҳамвории α - ро мебурад ва $AA_1 = a$, $BB_1 = b$ аст.

74. Аз охири *A*-и порчаи *AB* ҳамворӣ гузаронида шудааст. Аз охири *B* ва нуқтаи *C*-и ҳамин порча хатҳои рости параллел гузаронида шудааст, ки онҳо ҳамвориро дар нуқтаҳои B_1 ва C_1 мебуранд. Дарозии порчаи BB_1ро ёбед, агар: 1) CC_1 = 10 см, $AC:BC = 2:3$; 2) $AC=a$, $DC=b$, $CC_1 = c$ бошад.

75. Нуқтаҳои A, B, C, D дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд. Исбот кунед, ки хатҳои аз миёнаҷойи порчаҳои AB ва BC, AD ва CD гузаранда бо ҳам параллеланд.

76. Параллелограммҳои ABCD ва ABC_1D_1 дар ҳамвориҳои гуногун ҷойгиранд. Исбот кунед, ки чоркунҷаи CDD_1C_1 низ параллелограмм мебошад.

77. Параллелограмми ABCD ва ҳамвории онро набуранда дода шудаанд. Аз қуллаҳои параллелограмм хатҳои рости параллел гузаронида шудаанд, ки онҳо ҳамвории додашударо дар нуқтаҳои A_1, B_1, C_1 ва D_1 мебуранд. Дарозии порчаи DD_1-ро ёбед, агар: 1) AA_1=2 м, BB_1 =3 м, CC_1=8 м; 2)$AA_1=a$, $BB_1=b$, $CC_1=c$ бошад.

Масъалаҳо барои такрор

78. Куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дода шудааст. Дар кадом рӯяҳои он хатҳои рости ғайрипараллел ва бо хати рости AA_1 бурида намешудагӣ ҷойгир шуда наметавонанд?

79. Хати рости *a* дар ҳамворӣ ҷойгир аст. Аз нуқтаи дар ин ҳамворӣ гирифташуда чанд дона хати рост, ки бо *a* чиликианд, мегузаранд?

80. Дар ромб яке аз диагоналҳо ба тарафаш баробар аст. Кунҷҳои ромбро ёбед.

81. Асосҳои трапетсия ҳамчун 2:3 нисбат доранд. Хати миёнааш 5 см аст. Асосҳои трапетсияро ёбед.

82. Дар секунҷаи баробарпаҳлуи ABC (AB=BC) медианаи AD ва биссектрисаи CE перпендикуляранд. Кунҷи ADB-ро ёбед.

6. Ҷойгиршавии байниҳамдигарии хати рост ва ҳамворӣ. Параллелии онҳо

I. Ҷойгиршавии байниҳамдигарии хати рост ва ҳамвориро дар фазо дида мебароем. Мувофиқи натиҷаи пункти 2 ҳамворӣ ва хати рости дар он ҷойгирнабуда ё дар як нуқта бурида мешаванд, ё бурида намешаванд (ба расми 12 ниг.). Ҳамин тариқ, барои хати рости a ва ҳамвории α се имконият мавҷуд аст:

1) a дар α ҷойгир аст (ин дар планиметрия ҳамеша ҷой дошт);

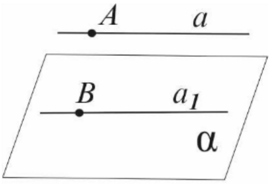
2) a бо α буриш дорад (расо дар як нуқта);

3) a бо α буриш надорад (яъне a ва α нуқтаҳои умумӣ надоранд).

Тавре аллакай мо дидем, ду имконияти аввала амалишавандаанд. Пурсида мешавад, ки имконияти сеюм ҳам амалӣ мешавад ё не?

Исбот мекунем, ки *барои ҳар гуна хамвории α хати рости а мавҷуд аст, ки бо α нуқтаҳои умумӣ надорад.*

Дар ҳамвории α ду нуқтаро интихоб карда, хати рости a_1-ро мегузаронем. Баъд, берун аз α нуқтаи А-ро гирифта, аз рӯйи он хати рости a-ро, ки ба хати рости a_1 параллел аст, мегузаронем (расми 30). Мувофиқи теоремаи 3 ин мумкин аст. Нишон медиҳем, ки хати рости a ҳамвории α-ро намебурад. Дар ҳақиқат, хатҳои рости a ва a_1 дар як ҳамвории β ҷойгиранд ва дар айни ҳол α ва β гуногунанд ва аз рӯйи хати рости a_1 бурида мешаванд. Агар дар хати рости a нуқтаи В, ки дар α ҷойгир аст,



Расми 30

мавҷуд мебуд, он гоҳ B ба a_1 тааллуқ медошт, чунки нуқтаи B ба ҳар ду ҳамворӣ тааллуқ дорад. Пас, хатҳои рости a ва a_1 ҳамдигарро мебуранд, ки ин ба созиш зид аст ($a \| a_1$).

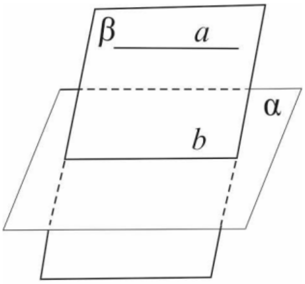
Монанди хатҳои рост дар ҳамворӣ вазъ дар ҳолати сеюм параллелии хати рост ва ҳамворӣ ном дорад.

Таъриф. Хати рост ва ҳамворӣ *параллел* номида мешаванд, агар онҳо бурида нашаванд.

Эзоҳ. Хати росте, ки дар ҳамворӣ ҷойгир аст, ба ҳамворӣ параллел ҳисоб карда намешавад.

Дар боло мо мавҷудияти хатҳои рост ва ҳамвориҳои параллелро исбот кардем. Акнун ба муайян кардани аломати параллелии онҳо машғул мешавем.

Теоремаи 5. *Агар хати рости дар ҳамворӣ ҷойгирнабуда ба ягон хати рости ин ҳамворӣ параллел бошад, он гоҳ вай ба худи ҳамворӣ ҳам параллел мешавад.*

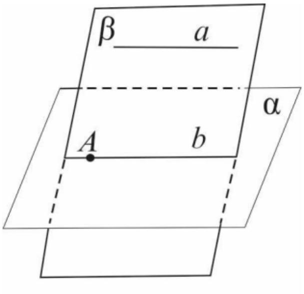


Расми 31

Исбот. Бигузор a хати ростест, ки ба хати рости дигари b, ки дар ҳамвории α ҷойгир аст, параллел бошад. Аз сабаби параллелӣ хатҳои a ва b дар як ҳамворӣ воқеанд. Бигузор ин ҳамворӣ β аст (расми 31). Ҳамвориҳои α ва β аз рӯйи хати рости b бурида мешаванд.

Биноан, агар a ва α ҳамдигарро буранд, нуқтаи буриш дар хати b ҷойгир аст. Ин номумкин аст, чунки хатҳои a ва b мувофиқи шарти теорема параллеланд. Инак, хати рости a ва ҳамвории α нуқтаи умумӣ надоранд, яъне параллеланд. Теорема исбот шуд.

Теоремаи баръакс ҳам дуруст аст: *агар хати рост ба ҳамворӣ параллел бошад, он гоҳ дар ҳамворӣ хати росте вуҷуд дорад, ки ба хати рости додашуда параллел аст.*



Расми 32

Исбот. Бигузор a хати ростест, ки ба ҳамвории додашудаи α параллел аст ва A нуқтаи дилхоҳест дар α. Хати рости a ва нуқтаи A ҳамвории β-ро муайян мекунанд (расми 32). Ҳамвориҳои α ва β дорои нуқтаи умумии A мебошанд. Пас, мувофиқи аксиомаи C_4 онҳо аз рӯйи хати рост бурида мешаванд. Агар ин хати рост b бошад, он гоҳ хатҳои a ва b дар як ҳамвории β ҷойгиранд. Хати рости a бо α нуқтаи умумӣ надорад, бинобар ин вай хати рости b -ро бурида наметавонад. Инак, хатҳои рости a ва b дар як ҳамворӣ ҷойгир буда, нуқтаи умумӣ надоранд, яъне параллеланд.

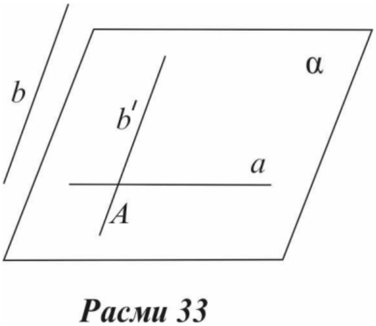
Аз теоремаи 5 ва теоремаи баръакси он чунин *аломати параллелии* хати рост ва ҳамворӣ бармеояд: *хати рост ба ҳамворӣ ҳамон вақт ва фақат ҳамон вақт параллел аст, агар вай дар ҳамворӣ ҷойгир набошад ва ба ягон хате, ки дар ҳамворӣ ҷойгир аст, параллел бошад.*

Хулоса. *Агар хати рост ба ҳамворӣ параллел бошад, он гоҳ дар ин ҳамворӣ миқдори беохири хатҳои рост мавҷуданд, ки ҳам ба хати рости додашуда ва ҳам байни худ параллеланд.*

Дурустии ин хулоса аз аломати параллелӣ ва теоремаи 4 бармеояд.

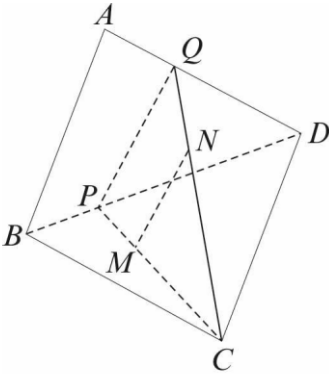
Акнун се масъалаеро меорем, ки ҳалли онҳо ба истифодаи аломати параллелии хати рост ва ҳамворӣ асос карда шудааст.

Масъалаи 1. Хатҳои рости чиликӣ дода шудаанд. Исбот мекунем, ки аз рӯйи якеи онҳо ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст, ки он ба хати рости дигарӣ параллел аст.



Расми 33

Ҳал. Бигузор хатҳои рости a ва b чиликианд ва нуқтаи A дар хати a воқеъ аст (расми 33). Аз болои нуқтаи A хати рости b' -ро, ки ба b параллел аст, мегузаронем. Мувофиқи аксиомаи C_4 хати b' ва a ҳамвории α-ро муайян мекунанд. Мувофиқи теоремаи 5 ҳамвории α ба хати рости b параллел аст.



Расми 34

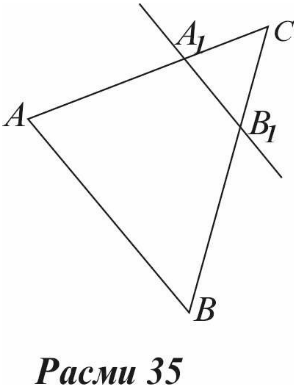
Масъалаи 2. Дар тетраэдри $ABCD$ нуқтаҳои M ва N маркази вазнинии секунҷаҳои BCD ва ACD мебошанд. Муайян мекунем, ки хати рости MN ба ҳамвории ABD параллел аст ё не.

Ҳал. Бигузор P нуқтаи буриши хатҳои CM ва BD, Q нуқтаи буриши хатҳои CN ва AD аст (расми 34). Аз сабаби маркази вазнинӣ будани нуқтаҳои M ва N дорем:

$$\frac{CM}{CP}=\frac{CN}{CQ}=\frac{2}{3}.$$

Барои ҳамин секунҷаи *CMN* ба секунҷаи *CPQ* монанд аст ва MN ба PQ параллел аст. Азбаски PQ дар ҳамвории ABD ҷойгир аст, пас мувофиқи аломати параллелӣ хати рости MN ба ҳамвории ABD параллел аст.

Масъалаи 3. Секунҷаи *ABC* дода шудааст. Ҳамвории ба хати рости *AB* параллелбуда тарафи *AC*-и секунҷаро дар нуқтаи A_1 ва тарафи *BC*-ро дар нуқтаи B_1 мебурад. Дарозии порчаи A_1B_1-ро меёбем, агар $AB = 18$ *см*, $AA_1:AC = 4:5$ бошад.



Расми 35

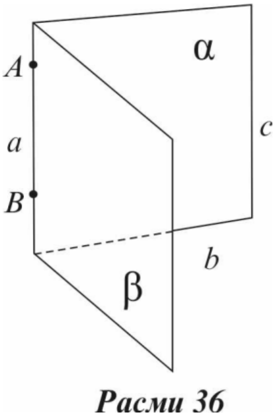
Ҳал. Услуби ба масъалаи планиметрӣ овardанро татбиқ карда, хати буриши ҳамворӣ, аниқаш A_1B_1 – ро тасвир мекунем (расми 35). Мувофиқи аломати параллелӣ хати рости A_1B_1 ба *AB* параллел аст ва дар ҳамвории ABC секунҷаҳои монанди *ABC* ва $A_1B_1C_1$-ро ҳосил мекунем. Мувофиқи монандии секунҷаҳо

$$\frac{A_1C}{AC}=\frac{A_1B_1}{AB}.\ \text{Вале}\quad \frac{A_1C}{AC}=\frac{AC-AA_1}{AC}=1-\frac{AA_1}{AC}=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5},$$

бинобар ин $A_1B_1 = AB\cdot\frac{A_1C}{AC}=18\cdot\frac{1}{5}=3{,}6\,см.$

II. Исботи теоремаи 4-ро, ки аломати параллелии хатҳои ростро дар фазо медод, бо мақсади сода карданаш мавқуф гузошта будем. Акнун бо истифодаи аломати параллелии хати рост ва ҳамворӣ исботи онро меорем.

Ин теорема тасдиқ мекард, ки ду хати рости ба хати рости сеюм параллел байни худ параллеланд. Ҳолатеро дида мебароем, ки ҳар се хати рост дар як ҳамворӣ ҷойгир намебошанд. Барои исбот фарз мекунем, ки хатҳои рости *a* ва *b* ба хати рости *c* параллеланд (расми 36).



Расми 36

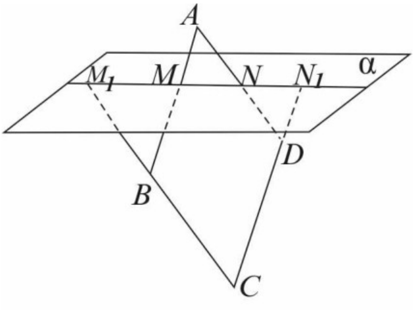
Нишон медиҳем, ки *a* ва *b* параллел мебошанд. Дар хати рости *a* нуқтаи дилхоҳи *A*-ро мегирем ва аз рӯйи *A* ва хати рости *c* ҳамвории *α*, баъд аз рӯйи *A* ва хати рости *b* ҳамвории β-ро мегузаронем. *A* нуқтаи умумии ин ҳамвориҳост, пас онҳо ҳамдигарро аз рӯйи хати рост мебуранд (аксиомаи C_4).

Нишон медиҳем, ки ин хати буриш ба хати рости *b* параллел аст. Мувофиқи аломати параллелии хати рост ва ҳамворӣ хати рости *b* ба ҳамвории *α* параллел аст. Хати буриш ва хати рости *b* дар ҳамвории β ҷойгиранд. Онҳо ҳамдигарро бурида наметавонанд, вагарна хати рости *b* ҳамвории α-ро мебурид. Яъне хати буриш ба хати рости *b* параллел аст. Аз рӯйи нуқтаи додашудаи *A* ду хати рости гуногуни ба *b* параллелро гузаронидан мумкин нест. Барои ҳамин хати буриш хати *a* аст. Ба хати рости *b* параллел будани хати *a* нишон дода шудааст.

Теоремаи 6. *Агар яке аз хатҳои рости параллел ҳамвориро бурад, он гоҳ дигарӣ низ ин ҳамвориро мебурад.*

Исбот. Бигузор a ва b ду хати рости параллел буда, хати рости a ҳамвории α-ро мебурад. Барои хати рости b се ҳолат имконпазир аст: 1) вай дар α ҷойгир аст; 2) вай ба α параллел аст; 3) вай α-ро мебурад. Агар b дар α ҷойгир бошад, он гоҳ мувофиқи аломати параллелии хати рост ва ҳамворӣ хати a ба α параллел аст, ки ин номумкин мебошад. Рафту агар b ба α параллел бошад, он гоҳ дар α хати росте вуҷуд дорад, ки ба b параллел мебошад, масалан, хати рости c. Аз параллели a бар b ва b бар c бармеояд, ки a бар c параллел аст (теоремаи 4). Аз ин ҷо, боз мувофиқи аломати параллелӣ, параллелии a ба α бармеояд, ки ин номумкин аст. Пас, танҳо ҳолати 3-юм имконпазир аст. Теорема исбот шуд.

Масъалаи 4. Тарафи ромби $ABCD$ 4 см аст. Тарафҳои AB ва AD ҳамвории α-ро мувофиқан дар нуқтаҳои M ва N мебуранд. Маълум, ки AM=1 см, AN=3 см аст. а) Нишон медиҳем, ки хатҳои рости CB ва CD ҳамвории α-ро мебуранд. б) Дарозии порчаҳои CM_1 ва CN_1-ро меёбем, ки дар ин ҷо мувофиқан M_1 ва N_1 нуқтаҳои буриши хатҳои CB ва CD бо ҳамвории α мебошанд.



Расми 37

Ҳал. а) Дар ромб тарафҳои муқобил параллеланд, яъне $AB||CD$ ва $AD||BC$ аст (расми 37). Мувофиқи шарти масъала AB ва AD ҳамвориро мебуранд. Мувофиқи теоремаи 6 хатҳои ба онҳо параллели CD ва BC низ ҳамвории α-ро мебуранд.

б) Нуқтаҳои M_1, N_1, M ва N нуқтаҳои буриши ҳамвории α бо ҳамвории ABC мебошанд. Барои ҳамин онҳо дар як хати рост мехобанд. Аз сабаби параллелии хатҳои рости AN ба M_1B секунҷаҳои AMN ва BMM_1 монанданд. Барои ҳамин

$$\frac{BM_1}{BM} = \frac{AN}{AM} \text{ ё } BM_1 = \frac{AN}{AM} \cdot BM, \; BM_1 = \frac{3}{1} \cdot 3 = 9 см.$$

Пас,

$$CM_1 = CB + BM_1 = 4 + 9 = 13 \text{ см.}$$

Аз тарафи дигар, аз сабаби параллелии хатҳои рости AM ва DN_1 секунҷаҳои AMN ва DN_1N монанданд. Пас,

$$\frac{DM_1}{DN} = \frac{AM}{AN}, \; DN_1 = \frac{AM}{AN} \cdot DN, \; DN_1 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} см.$$

Ҳамин тариқ,

$$CN_1 = CD + DN_1 = 4 + \frac{1}{3} = 4\frac{1}{3} см.$$

Саволу супоришҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Ҷойгиршавии байниҳамдигарии хати рост ва ҳамвориро дар фазо тасвир кунед.

2. Дар кадом ҳолат хати рост ва ҳамворӣ параллел номида мешаванд? Дар кадом ҳолат онҳо ҳамдигарро мебуранд?

3. Чӣ тавр аз нуқтаи додашуда хати рости ба ҳамвории додашуда параллелро гузаронидан мумкин аст?

4. Аломати параллелии хати рост ва ҳамвориро дар фазо баён карда, онро шарҳ диҳед.

5. Яке аз хатҳои рости параллел ҳамвориро мебурад. Нисбат ба хати рости дуюм ва ҳамворӣ чӣ гуфтан мумкин аст?

6. Се хати росте, ки ба хати рости чорум параллеланд, байни худ параллел буда метавонанд?

Масъалаҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

83. Исбот кунед, ки аз рӯйи нуқтаи додашуда хати ростеро гузаронидан мумкин аст, ки ба ҳар як ду ҳамвории ҳамдигарро буранда параллел аст.

84. Нуқтаҳои A ва B дар ҳамвории α мехобанд. Нуқтаи C бошад, дар ин ҳамворӣ воқеъ нест. Исбот кунед, ки хати рости аз миёначойи порчаҳои AC ва BC гузаранда ба α параллел аст.

85. Маълум аст, ки ду ҳамворӣ аз рӯйи хати рости a бурида мешаванд ва ҳамвории α-ро аз рӯйи хатҳои рости параллел мебуранд. Исбот кунед, ки хати рости a ба ҳамвории α параллел аст.

86. Нуқтаи E ба ҳамвории росткунҷаи $ABCD$ тааллуқ надорад. Исбот кунед, ки хати рости CD ба ҳамвории ABE параллел аст.

87. Секунҷаи ABC дода шудааст. Ҳамвории ба хати рости AB параллелбуда тарафи AC-и секунҷаро дар нуқтаи A_1 ва тарафи BC-ро дар нуқтаи B_1 мебурад. Дарозии порчаи A_1B_1-ро ёбед, агар: 1) AB=10 см, AA_1:A_1C = 5:3; 2) $AA_1=a$, $AB=b$, $A_1C=c$ бошад.

88. Асоси пирамидаи чоркунҷаи *SABCD* параллелограмм мебошад. Ҷойгиршавии байниҳамдигарии хати росте, ки буриши ҳамвориҳои рӯяҳои *SAB* ва *SCD* аст, бо ҳамвории асос *ABCD* чӣ гуна аст?

89. Ду чоркунҷаи ҳамвори *ABCD* ва *CDEF*, ки ҳамвориҳояшон бурида мешаванд, дода шудаанд. Аз рӯйи хати рости *AB* ҳамворӣ гузаронида шудааст, ки он ҳамвории *CDEF*-ро мебурад. Дар кадом ҳолат хати буриши ин ҳамвориҳо ба хати рости *AB* параллел аст?

90. Исбот кунед, ки агар хати рости *a* ба хати рости *b* ва ҳамвории α параллел бошад, он гоҳ хати рости *b* ё ба ҳамвории α параллел аст, ё дар он ҷойгир мебошад.

91. Исбот кунед, ки агар ҳар яке аз ду ҳамвории ҳамдигарро буранда ба хати рости додашуда параллел бошад, он гоҳ хати рости буриши ин ҳамвориҳо низ ба хати рости додашуда параллел аст.

92*. Исбот кунед, ки ҳар гуна буриши тетраэдр бо ҳамвории ба ду теғаи бо ҳам чиликии он параллелбуда параллелограмм мебошад.

93*. Чор нуқтаи *A, B, C, D*-и дар як ҳамворӣ ҷойгирнабуда дода шудааст. Исбот кунед, ки ҳар гуна ҳамвории ба хатҳои рости *AB* ва *CD* параллелнабуда хатҳои рости *AC, AD, BD, BC*-ро дар қуллаҳои параллелограмм мебурад.

Масъалаҳо барои такрор

94. Кадом хусусияти ду хати рости ҳамдигарро буранда ва ду хати рости параллелбударо ду хати рости чилликӣ надорад?

95. Чор нуқтаи *A,B,C,D*-и дар як ҳамворӣ ҷойгир набуда дода шудаанд. Исбот кунед, ки хатҳои росте, ки миёнаҷойи порчаҳои *AB* ва *CD, AC* ва *BD, AD* ва *BC* -ро пайваст мекунанд, дар як нуқта бурида мешаванд.

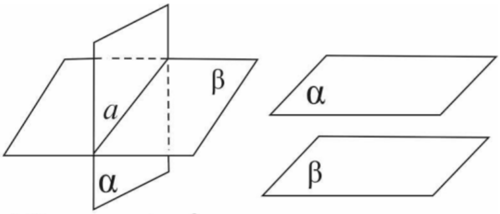
96. Трапетсияи *ABCD* бо диагонали *AC* ба ду секунҷаи монанд ҷудо мешавад. Диагонали *AC* бо асос кунҷи 45°-ро ташкил мекунад. Тарафҳои паҳлуӣ $AD=1$ ва $BC=\sqrt{2}$ мебошанд. Кунҷҳои трапетсияро ёбед.

97. Дар секунҷаи *ABC, BE* - медиана, *BD* - баландӣ ва $\angle A = 30^0$, $\angle C = 45^0$ аст. $\angle DBE$ -ро ёбед.

7. Ҷойгиршивии байниҳамдигарии ду ҳамворӣ. Параллелии онҳо

I. Мувофиқи аксиомаи C_4 (пункти 2) агар ду ҳамвории гуногун ақаллан як нуқтаи умумӣ дошта бошанд, он гоҳ онҳо аз рӯйи хати рост бурида мешаванд. Дар ин ҳолат, тавре мо аллакай медонем, ин ҳамвориҳоро буридашаванда меноманд. Мантиқан ҳолати дигар низ имконпазир аст, ки мо онро ҳамчун таъриф меорем.

Таъриф. Ду ҳамворӣ *параллел* номида мешаванд, агар онҳо ҳамдигарро набуранд, яъне нуқтаҳои умумӣ надошта бошанд.



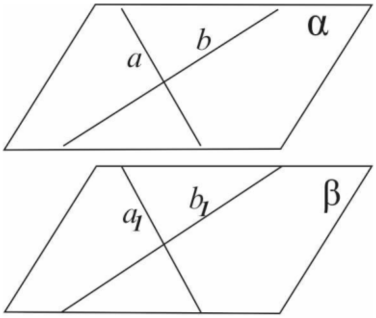
а) Ҳамвориҳои α ва β аз рӯйи хати рости a бурида мешаванд

а) Ҳамвориҳои α ва β параллеланд

Расми 38

Ҳар ду имконияти ҷойгиршавии ду ҳамворӣ дар расми 38 нишон дода шудааст. Дар аввал аломати параллелии ҳамвориҳоро дида баромада, баъд ба масъалаи мавҷудияти ҳамвориҳои параллел машғул мешавем.

Теоремаи 7 *(Аломати 1-уми параллелии ҳамвориҳо). Агар ду хати рости ҳамдигарро бурандаи як ҳамворӣ мувофиқан ба ду хати рости ҳамвории дигар параллел бошанд, он гоҳ ин ҳамвориҳо параллеланд.*



Расми 39

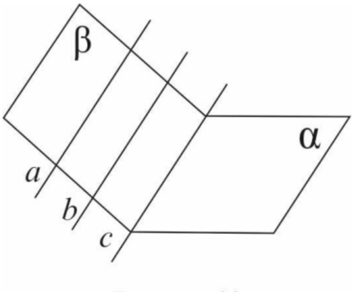
Исбот. Бигузор *a* ва *b* хатҳои рости ҳамдигарро бурандаи ҳамвории α буда, a_1 ва b_1 хатҳои рости ба онҳо параллели ҳамвории β бошанд (расми 39).

Исбот кардан зарур аст, ки α ва β бо ҳам параллеланд, яъне нуқтаи умумӣ надоранд. Теоремаро аз баръаксаш исбот мекунем, яъне фарз мекунем, ки ҳамвориҳои α ва β параллел нестанд. Дар ин ҳолат онҳо нуқтаҳои умумӣ доранд ва мувофиқи аксиомаи C_4 аз рӯйи хати рост бурида мешаванд. Бигузор *c* хати буриш аст. Азбаски *a* ва *b* мувофиқан ба a_1 ва b_1 параллеланду a_1, b_1 дар β ҷойгиранд, пас мувофиқи аломати параллелии хати рост ва ҳамворӣ ҳосил мекунем, ки *a* ва *b* ба β параллеланд.

Яъне на хати рости *a* ва на хати рости *b* хати рости *c*-ро мебурад. Аз ин ҷой ва аз сабаби он ки хатҳои *a*, *b* ва *c* дар як ҳамвории α чойгиранд, бармеояд, ки *a* ва *b* ба *c* параллеланд. Ин танҳо дар ҳолате мумкин аст, ки агар *a* ва *b* ҳамҷоя шаванд ё параллел бошанд. Вале мувофиқи шарти теорема ин хатҳо ҳамдигарро мебуранд. Зиддияти ҳосилшуда нишон медиҳад, ки фарзи кардашуда нодуруст аст, яъне ҳамвориҳо параллеланд. Теорема исбот шуд.

Теоремаи 8 *(Аломати 2-юми параллелии ҳамвориҳо). Агар ҳамворӣ ба ду хати рости ҳамдигарро бурандаи ҳамвории дигар параллел бошад, он гоҳ ин ду ҳамворӣ параллеланд.*

Исбот. Фарз мекунем, ки хатҳои рости a ва b ҳамдигарро мебуранд, онҳо дар ҳамвории α ҷойгиранд ва ба ҳамвории β параллеланд. Нишон медиҳем, ки α ва β параллел мебошанд. Агар ин тавр намебуд, онҳо аз рӯйи хати рости c бурида мешуданд. Мувофиқи аксиома доир ба хатҳои рости параллел a ё b бо хати рости c нуқтаи умумӣ дорад. Яъне a ё b ҳамвории β-ро мебурад, ки ин ба параллел будани онҳо ба ӯ зид аст. Дурустии тасдиқ нишон дода шудааст.



Расми 40

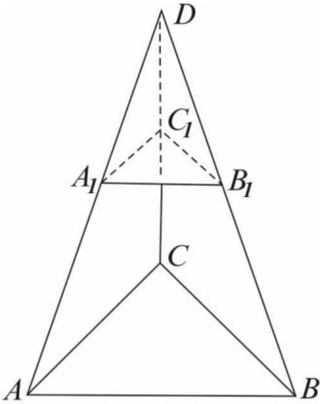
Эзоҳ. Дар аломатҳои параллелии ҳамвориҳо ҳамдигарро буридани хатҳои рост муҳим аст. Вагарна ду хати рости a ва b -ро, ки ба хати рости c параллеланд (расми 40) гирифта, ҳосил мекунем, ки a ва b ба ҳамвории α параллел буда, вале ҳамвории β ба ҳамвории α параллел нест.

Масъалаи 1. Маълум аст, ки тарафҳои AB ва BC-и секунҷаи ABC ба ҳамвории α параллеланд. Нишон медиҳем, ки ҳамвории ABC ба α параллел аст.

Ҳал. Дар ҳамвории ABC хатҳои рости AB ва BC ду хати ҳамдигарро буранда мебошанд. Онҳо ба ҳамвории α параллеланд. Пас, мувофиқи теоремаи 8 ҳамвориҳои *ABC* ва α параллеланд.

Масъалаи 2. Маълум, ки хати рости *a* дар ҳамвории α ҷойгир аст ва α ба ҳамвории β параллел аст. Нишон медиҳем, ки *a* ба β параллел аст.

Ҳал. Дар ҳақиқат, агар хати рости *a* ба ҳамвории β параллел набошад, он гоҳ онҳо нуқтаи умумӣ доранд. Ин нуқта нуқтаи умумии α ва β низ ҳаст. Вале онҳо параллеланд. Пас чунин нуқта вуҷуд надорад, яъне *a* ва β параллел мебошанд.



Расми 41

Масъалаи 3. Дар тетраэдри $ABCD$, $\frac{DB_1}{DB}=\frac{A_1C_1}{AC}$ ва хати рости A_1C_1 ба хати AC параллел аст (расми 41). Нишон медиҳем, ки ҳамвориҳои *ABC* ва $A_1B_1C_1$ параллеланд.

Ҳал. Аз сабаби параллелии A_1C_1 ва AC секунҷаҳои DA_1C_1 ва *DAC* монанданд. Барои ҳамин $\frac{DC_1}{DC}=\frac{A_1C_1}{AC}$. Аз ин ҷой ва аз шарти масъала ҳосил мекунем: $\frac{DC_1}{DC}=\frac{DB_1}{DB}$. Ин нишон медиҳад, ки секунҷаҳои DC_1B_1 ва *DCB* монанданд. Пас, C_1B_1 ба *CB* параллел аст. Инак, ду хати рости ҳамдигарро бурандаи ҳамвории *ABC* (хатҳои *AC* ва *CB*) ба ду хати рости ҳамдигарро бурандаи ҳамвории $A_1B_1C_1$ параллел мебошанд. Пас, мувофиқи теоремаи 7 ин ҳамвориҳо параллеланд.

Масъалаи 4. Маълум аст, ки хатҳои рости a ва b чиликианд. Нишон медиҳем, ки агар ҳар дуи онҳо ба ҳамвориҳои α ва β параллел бошанд, он гоҳ ин ҳамвориҳо параллеланд.

Ҳал. Аз сабаби параллелии a ба α ва ба β мувофиқи аломати параллелии хати рост ва ҳамворӣ, хатҳои рости a_1 ро дар α ва a_2-ро дар β ёфтан мумкин аст, ки онҳо ба a параллеланд. Мувофиқан, аз рӯйи параллелии b ба α ва ба β, хати рости b_1 -ро дар α ва b_2-ро дар β ёфтан мумкин аст, ки онҳо ба b параллеланд. Мувофиқи аломати параллелии хатҳои рост a_1 ба a_2 ва b_1 ба b_2 параллел мебошанд. Мувофиқи шарти масъала хатҳои a ва b чиликианд. Бинобар ин a_1 ва b_1 параллел шуда наметавонанд. Пас онҳо ҳамдигарро мебуранд, чунки дар як ҳамворӣ ҷойгиранд. Айнан ҳамин мулоҳизарониро нисбат ба хатҳои a_2 ва b_2 такрор карда, ҳосил мекунем, ки ин хатҳо низ ҳамдигарро мебуранд. Аз ин ҷо ва аз параллелии a_1 ба a_2 ва b_1 ба b_2 мувофиқи теоремаи 7 параллелии ҳамвориҳои α ва β бармеояд.

II. Ба масъалаи мавҷудияти ҳамвориҳои параллел бармегардем. Пурсида мешавад, ки оё аз рӯйи нуқта, ки дар ҳамвории додашуда ҷойгир нест, ба ин ҳамворӣ ҳамвории параллел гузаронидан мумкин аст ё не. Ба ин савол тасдиқи зерин ҷавоб медиҳад.

Теоремаи 9. *Аз нуқтаи аз ҳамвории додашуда берун ҳамвории ба ҳамвории додашуда параллел гузаронидан мумкин аст ва дар айни ҳол фақат якто.*

Исбот. Бигузор α ҳамворӣ ва A нуқтаи дар он воқеънабуда аст. Исботро ба ду қисм ҷудо мекунем:

а) **Мавҷудияти ҳамворӣ**. Бигузор a ва b ду хати рости дар ҳамвории β ҳамдигарро буранда бошанд. Аз рӯйи нуқтаи A хатҳои рости a_1 ва b_1-ро, ки ба хатҳои рости a ва b параллеланд, мегузаронем (Барои ин кифоя аст, масалан, аз рӯйи A ва хати a ҳамворӣ гузаронида, дар ин ҳамворӣ хати a_1-ро созем.). Хатҳои рости a_1 ва b_1 ҳамдигарро мебуранд, барои ҳамин онҳо ҳамвории β-ро муайян мекунанд (аксиомаи C_4). Мувофиқи теоремаи 7 ин ҳамвориҳо параллеланд.

б) **Ягонагии ҳамворӣ**. Фарз мекунем, ки ҳамвории дигари β_1 вуҷуд дорад, ки нуқтаи A-ро дар бар гирифта ба α параллел аст. β_1 ҳам a_1 ва ҳам b_1-ро дар бар гирифта наметавонад. Вагарна бо β ҳамҷоя мешавад. Барои ҳамин ақаллан яке аз онҳо, a_1 ё b_1 ҳамвории β_1-ро мебурад. Бигузор чунин хат, хати a_1 аст. Аз параллелии a ва a_1 бармеояд, ки a низ ҳамвории β_1-ро мебурад. Ин бошад, ба параллелии α ва β_1 зид аст. Инак, ҳамвории β ба таври ягона муайян карда мешавад.

Аз теорема чунин хулосаҳо бармеоянд:

1. *Хатҳои рости ба ҳамвории додашуда параллел, ки аз рӯйи нуқтаи додашудаи берун аз ҳамворӣ мегузаранд, дар ҳамворие ҷойгиранд, ки он ба ҳамвории додашуда параллел буда, ин нуқтаро дар бар мегирад;*

2. *Аз рӯйи хати росте, ки ба ҳамвории додашуда па-*

раллел аст, ҳамвории ба ин ҳамворӣ параллел гузаронидан мумкин аст ва дар айни ҳол фақат якто;

3. *Ҳар гуна хати рости дар яке аз ҳамвориҳои параллел ҷойгирбуда ба ҳамвории дуюм параллел аст;*

4. *Ҳар гуна ҳамворие, ки бо яке аз ду ҳамвории параллел буриш дорад, ҳамвории дуюмро низ мебурад;*

5. *Ҳар гуна ду ҳамворие, ки ба ҳамвории сеюм параллеланд, байни худ параллел мебошанд.*

Эзоҳ. Теоремаи 9 ба теоремаи стереометрӣ оид ба хатҳои рости параллел дар фазо (теоремаи 3) монанд аст.

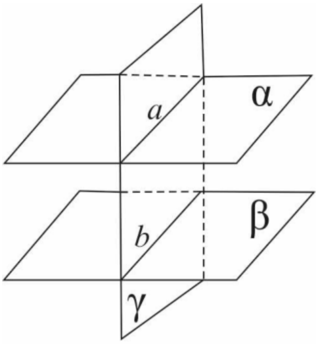
Аз панҷ хосияти дар боло овардашуда танҳо охиринашро исбот мекунем. Фарз мекунем, ки ҳамвориҳои α ва β ба ҳамвории γ параллеланд. Нишон медиҳем, ки α ва β ҳамдигарро намебуранд.

Баръаксашро фарз мекунем, яъне бигузор ҳамвориҳои α ва β ҳамдигарро буранд. Дар ин маврид онҳо нуқтаи умумӣ доранд. Пас, аз рӯйи ин нуқта ду ҳамвории гуногуни α ва β-и ба ҳамвории γ параллел мегузарад. Ин бошад, ба теоремаи 9 зиддият дорад. Инак, ҳамвориҳои α ва β ҳамдигарро намебуранд, яъне онҳо байни худ параллел мебошанд.

III. Пурсида мешавад: ҳангоми ду ҳамвории параллелро буридани ҳамвории сеюм чӣ ҳосил мешавад? Албатта, ҷуфти хатҳои рост ҳосил мешавад.

Теоремаи 10. *Агар ду ҳамвории параллел бо ҳамвории сеюм бурида шаванд, он гоҳ хатҳои рости буриш параллел мебошанд (расми 42).*

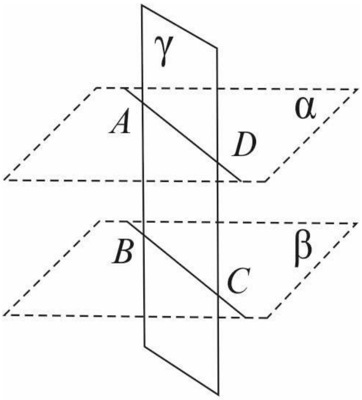
Исбот. Бигузор α ва β ҳамвориҳои параллеланд ва ҳамвории γ онҳоро мебурад. Мувофиқан, хатҳои рости a ва b буриши γ бо α ва бо β мебошанд (расми 42). Хатҳои рости a ва b дар як ҳамворӣ ҷойгиранд. Агар онҳо параллел набошанд, пас нуқтаи умумӣ доранд. Ин нуқта ба ҳар ду ҳамвориҳои α ва β тааллуқ дорад. Ин номумкин аст, чунки онҳо параллеланд. Пас хатҳои рости a ва b параллеланд.



Расми 42

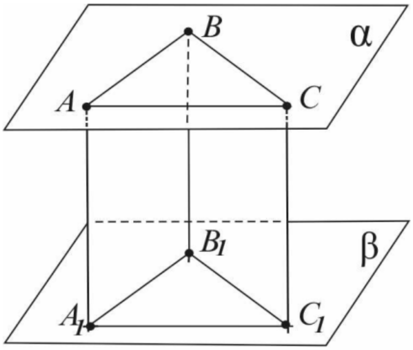
Татбиқи ин теоремаро дар ҳалли ду масъала нишон медиҳем.

Масъалаи 5. Маълум, ки нӯгҳои порчаҳои параллел дар ду ҳамвории бо ҳам параллел ҷойгиранд. Нишон медиҳем, ки онҳо бо ҳам баробаранд.



Расми 43

Ҳал. Бигузор α ва β ду ҳамвории параллел мебошанд, AB ва DC ду порчаи параллел, ки нуқтаҳои A,D ба α ва нуқтаҳои B,C ба β мутааллиқанд (расми 43). Хатҳои рости AB ва DC ҳамчун хатҳои параллел ҳамвории γ-ро муайян мекунанд. A ва D нуқтаҳои умумии ҳамвориҳои α ва γ ҳастанд. Барои ҳамин хати рости AD буриши ин ҳамвориҳост. Чунин мулоҳизарониҳоро нисбат ба γ ва β такрор карда, ҳосил мекунем, ки хати рости BC буриши γ ва β аст. Мувофиқи теоремаи 10 AD ба BC параллел мебошад, чунки α ба β параллел аст. Бар замми ин, мувофиқи шарт AB ба DC параллел аст. Пас, $ABCD$ параллелограмм мебошад, яъне $AB=DC$.



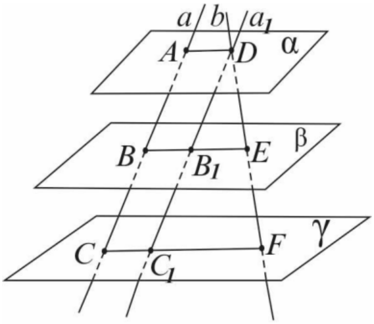
Расми 44

Масъалаи 6. Аз қуллаи секунҷаи ABC, ки дар яке аз ду ҳамвории бо ҳам параллел ҷойгир аст, хатҳои рости параллел гузаронида шудаанд, ки онҳо ҳамвории дуюмро дар нуқтаҳои A_1, B_l, C_1 мебуранд. Нишон медиҳем, ки секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ баробаранд.

Ҳал. Шарти масъала ва теоремаи 10-ро истифода карда, тавре ҳангоми ҳалли масъалаи 5 амал карда будем, рафтор карда, параллелограмм будани чоркунҷаҳои ABB_1A_1 ва ACC_1A_1-ро муқаррар мекунем (расми 44). Барои ҳамин $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$. Баробар будани секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ аз аломати баробарии секунҷаҳо аз рӯйи се тараф бармеояд.

Дар планиметрия теоремаи Фалесро нисбат ба хатҳои рости параллел ва хатҳои рости онҳоро буранда дида баромада будем. Акнун теоремаи ба он монандро нисбат ба ҳамвориҳои параллел ва хатҳои рости онҳоро буранда меорем.

Теоремаи 11 (Теоремаи Фалес дар фазо). *Агар ду хати рост бо ҳамвориҳои параллел бурида шаванд, он гоҳ* *порчаҳои дар байни ҳамвориҳо буда байни худ мутаносибанд.*



Расми 45

Исбот. Бигузор α, β, γ, се ҳамвории байни худ параллел бошанд. Хати рости a онҳоро мувофиқан дар нуқтаҳои A,B,C ва хати рости b дар нуқтаҳои D,E,F мебурад (расми 45). Исбот кардан лозим аст, ки

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF} \qquad (1)$$

мебошад. Аз рӯйи нуқтаи D хати рости a_1-ро, ки ба a параллел аст, мегузаронем. Хати рости a ҳамвориҳои β ва γ- ро мебурад. Мувофиқи теоремаи 6 хати рости a_1 низ ин ҳамвориҳоро мебурад. Бигузор B_1 ва C_1 нуқтаҳои буришанд. Аз сабаби параллел будани α, β, γ ва инчунин параллелии a ва a_1 дорем (ниг. ба ҳалли масъалаи 5):

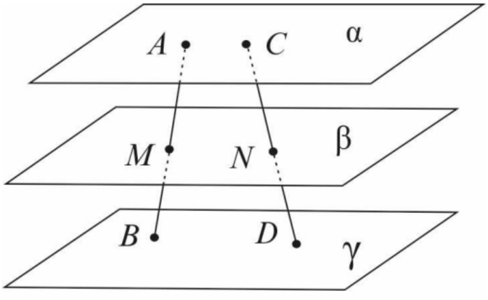
$$AB=DB_1, \quad BC=B_1C_1. \qquad (2)$$

Хатҳои рости b ва a_1 ҳамдигарро мебуранд, биноан онҳо ҳамвории λ-ро муайян мекунанд. Аз сабаби параллелии β ва γ хати буриши λ бо β бо хати буриши λ бо γ параллел аст (теоремаи 10). Яъне, B_1E ба C_1F параллел буда, секунҷаҳои DB_1E ва DC_1F монанданд. Барои ҳамин

$$\frac{DB_1}{B_1C_1}=\frac{DF}{EF}.$$

Аз ин ҷо ва аз (2) баробарии (1) ҳосил мешавад. Теорема исбот шуд.

Масъалаи 7. Ҳамвориҳои α, β ва γ параллеланд. Онҳо бо ду хати ҳамдигарро буранда мувофиқан дар нуқтаҳои A,M,B ва C,N,D бурида мешаванд (расми 46). Маълум, ки $AM = 3$ см, $AB = 8$ см ва $ND = 12$ см аст. Дарозии CN-ро меёбем.



Расми 46

Ҳал. Мувофиқи теоремаи Фалес дорем: $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND}$. Аз ин ҷо:

$$CN = \frac{AM}{MB} \cdot ND = \frac{3}{5} \cdot 12 = \frac{36}{5} = 7{,}2 \text{ см.}$$

Саволу супоришҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Дар кадом ҳолат ду ҳамворӣ параллел номида мешаванд? Ҳамдигарро буранда - чӣ?

2. Аломатҳои параллелии ҳамвориҳоро баён кунед. Дар айни ҳол ҳамдигарро буридани хатҳои рост дар онҳо магар муҳим аст?

3. Теоремаро дар бораи мавҷудият ва ягона будани ҳамвории параллел баён кунед. Хулосаҳои онро шарҳ дода, нақшаҳои заруриро кашед.

4. Доир ба буриши ҳамворӣ бо ҳамвориҳои параллел чӣ гуфтан мумкин аст?

5. Теоремаи Фалесро дар фазо шарҳ диҳед.

Масъалаҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

98. Исбот кунед, ки агар хати рост яке аз ду ҳамвориҳои параллелро бурад, он гоҳ дигарашро ҳам мебурад.

99. Ҳамвориҳои α ва β ҳамдигарро мебуранд. Исбот кунед, ки ҳар гуна ҳамвории γ ақаллан яке аз ин ҳамвориҳоро мебурад.

100. Аз рӯйи қуллаҳои параллелограмми $ABCD$, ки дар яке аз ду ҳамвории параллел ҷойгир аст, хатҳои рости параллел гузаронида шудааст. Ин хатҳои рост ҳамвории дуюмро дар нуқтаҳои A_1,B_l,C_l,D_l мебуранд. Исбот кунед, ки чоркунҷаи $A_1B_lC_1D_1$ низ параллелограмм мебошад.

101. Исбот кунед, ки агар чор хати рост, ки аз рӯйи нуқтаи A мегузаранд, ҳамвории онро дар куллаҳои параллелограмм буранд, он гоҳ онҳо ҳар гуна ҳамвории ба α параллел ва аз нуқтаи A нагузарандаро низ дар қуллаҳои параллелограмм мебуранд.

102. Ду ҳамвории параллел дода шудааст. Аз рӯйи нуқтаҳои A ва B-и яке аз ин ҳамвориҳои параллел хатҳои рости параллел гузаронида шудаанд, ки онҳо ҳамвории дуюмро дар нуқтаҳои A_1 ва B_1 мебуранд. Дарозии порчаи $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ чанд аст, агар AB=4 см бошад?

103. Се хати рост, ки аз рӯйи як нуқта мегузаранд, ҳамвории додашударо дар нуқтаҳои A,B,C ва ҳамвории ба он параллелро дар нуқтаҳои A_l,B_l,C_1 мебуранд. Монандии секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$-ро исбот кунед.

104*. Се ҳамвории бо ҳам параллели α_1, α_2, α_3 дода шудаанд. Бигузор X_l, X_2, X_3 нуқтаҳои буриши ин ҳамвориҳо бо хати рости дилхоҳ аст. Исбот кунед, ки нисбати дарозии порчаҳо $X_1X_2 : X_2X_3$ ба хати рост вобаста нест, яъне барои ҳар гуна ду хати рост якхела аст.

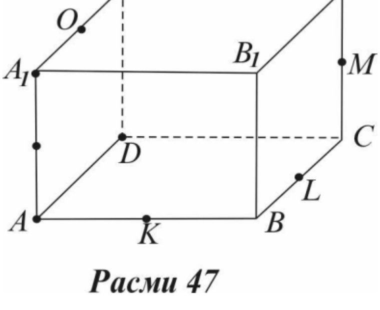
105. Ду ҳамвории бо ҳам параллел ва нуқтаи P-и дар байни онҳо ҷойгирбуда дода шудаанд. Ду хати рости аз нуқтаи P гузаранда ҳамвории ба P наздиктарбударо дар нуқтаҳои A_1 ва A_2 ва ҳамвории дуртарбударо дар нуқтаҳои B_1 ва B_2 мебурад. Дарозии порчаи B_1B_2-ро ёбед, агар: 1) A_1A_2=6 см ва PA_1:A_1B_1=3:8; 2) A_1A_2=10 см ва PA_1:A_1B_1=2:7 бошад.

106. Бигузор $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеди росткунҷа аст (расми 47). Исбот кунед, ки нуқтаҳои A, C, B_1, D_1 дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд.

107. Исбот кунед, ки дар параллелепипеди росткунҷаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ҳамвориҳои A_1BD ва CB_1D_1 бо ҳам параллеланд.

108. Исбот кунед, ки дар параллелепипеди росткунҷа диагонали AC_1 бо ҳамвориҳои A_1BD ва CB_1D_1 ба се порчаи баробар ҷудо карда мешавад.

109*. Бигузор K,L,M,N,O,P миёнаҷойи теғаҳои дар расми 47 нишондодашудаи параллелепипед бошанд. Исбот кунед, ки ин нуқтаҳо дар як ҳамворӣ ҷойгиранд.



Расми 47

Масъалаҳо барои такрор

110. Исбот кунед, ки хати рости AB ба ҳамвории CDA_1 параллел аст (расми 47).

111. Нуқтаҳои A,B,C,D дар як ҳамворӣ ҷойгир нестанд. Нуқтаҳои K, M, P миёнаҷойи порчаҳои AB, BC, BD мебошанд. Исбот кунед, ки ҳамвории КМР ба хатҳои рости AC, CD ва AD параллел аст.

112. Дар тарафи BC-и квадрати $ABCD$ нуқтаи дилхоҳи M гирифта шудааст. Биссектрисаи кунҷи DAM тарафи CD-ро дар нуқтаи N мебурад. Исбот кунед, ки $AM=BM+DN$ аст.

113. Дар секунҷаи ABC тарафи $BC=a$, $\angle B=\beta$ m_a - медианаи ба тарафи BC фуровардашуда маълуманд. Тарафҳои дигар ва кунҷҳои секунҷа ёфта шаванд.

§3. ПЕРПЕНДИКУЛЯРИИ ХАТҲОИ РОСТ ВА ҲАМВОРИҲО ДАР ФАЗО

8. Перпендикулярии ду хати рост, хати рост ва ҳамворӣ. Перпендикуляр ба ҳамворӣ

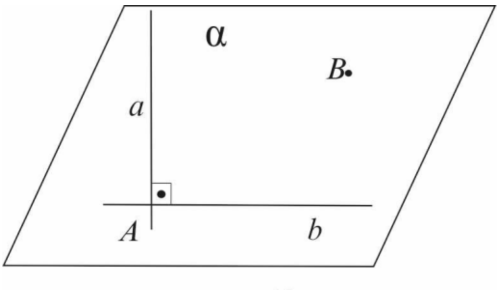
I. Дар қатори муносибати параллелӣ, дар геометрия муносибати перпендикулярӣ дорои мавқеи муҳим мебошад. Бар хилофи ҳолати ҳамворӣ, ки танҳо доир ба перпендикулярии ду хати рост сухан рондан мумкин буд, дар фазо се имконият ҳаст: перпендикулярии: а) ду хати рост; б) хати рост ва ҳамворӣ; в) ду ҳамворӣ. Инро дар мисоли параллелепипеди росткунҷа баръало пайхас кардан мумкин аст. Мо акнун ин муносибатҳоро пай дар пай, аз перпендикулярии ду хати рост сар карда меомӯзем.

Тавре медонем, дар ҳамворӣ, агар ҳангоми бурида шудани ду хати рост кунҷҳои рост ҳосил шаванд, он гоҳ онҳоро перпендикуляр меноманд. Баъд, дар ҳамворӣ аз нуқтаи додашуда, новобаста ба он ки вай дар хати рост ҷойгир аст ё на, ба хати рост перпендикуляр гузаронидан мумкин аст ва дар айни ҳол фақат якто. Чун дар ҳамворӣ таърифи зеринро дохил мекунем.

Таърифи 1. Ду хати рост дар фазо *перпендикуляр* номида мешаванд, агар онҳо дар зери кунҷи рост бурида шаванд.

Қайд мекунем, ки бурида шудани хатҳои рост дар ин таъриф ниҳоят муҳим аст.

Масъалаи мавҷудият ва ягона будани перпендикулярро ба хати рости a дар фазо, ки аз рӯйи нуқтаи додашудаи A мегузарад, меомӯзем.



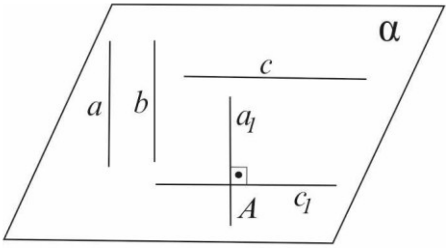
Расми 48

а) Бигузор нуқтаи A дар хати рости a ҷойгир аст (расми 48). Нуқтаи аз хати рости a беруни B-ро гирифта, аз рӯйи ин нуқта ва хати рости a ҳамвории α-ро мегузаронем (теоремаи 1). Дар ҳамвории α аз рӯйи нуқтаи A, мувофиқи теоремаи планиметрӣ хати рости b-ро, ки ба a перпендикуляр аст, гузаронидан мумкин аст. Мо дида будем, ки аз рӯйи як хати рост миқдори беохири ҳамвориҳоро гузаронидан мумкин аст (ниг. ба пункти 2). Дар ҳар яки ин ҳамвориҳо аз рӯйи нуқтаи A ба хати рости a перпендикулярро гузаронидан мумкин мебошад. Онҳо гуногунанд, чунки дар ҳолати якхела будани онҳо ҳамвориҳо ҳамҷоя мешаванд, ки вазъ ин тавр нест. Ин перпендикулярҳо хатҳои ростанд, ки аз атрофи нуқтаи A мисли сихҳои чархи велосипед ҳамчун марказ сар мешаванд ва миқдорашон беҳисоб аст. Тавофути ҳолати фазоӣ аз ҳолати ҳамворӣ маҳз дар ҳамин аст.

б) Бигузор нуқтаи A берун аз хати рости a ҷойгир аст. Мувофиқи теоремаи 1 ягона ҳамвории α вуҷуд дорад, ки аз рӯйи нуқтаи A ва хати рости a мегузарад. Дар ҳамвории α аз рӯйи теоремаи планиметрӣ аз нуқтаи A ба хати рости a якто перпендикуляр гузаронидан мумкин аст. Мебинем, ки вазъ дар ин ҷо айнан бо вазъ дар ҳамворӣ якхела аст. Яъне дар фазо ҳам аз нуқтаи берун аз хати рост ба он танҳо якто перпендикуляр гузаронидан мумкин аст.

Тасдиқи зерин хосияти хатҳои рости параллелро нисбат ба перпендикулярӣ муайян мекунад.

Теоремаи 12. *Агар яке аз ду хати рости параллел ба хати рости сеюм перпендикуляр бошад, он гоҳ хати рости дигарӣ ҳам ба ин хат перпендикуляр аст.*

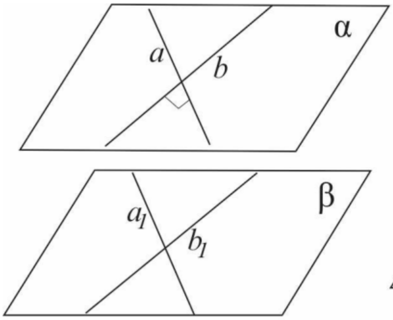


Расми 49

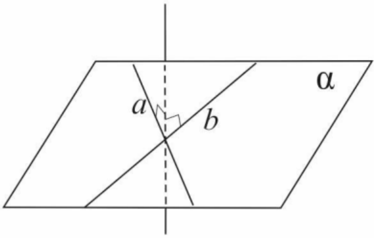
Исбот. Фарз мекунем, ки хатҳои рости a ва b параллеланд ва a ба хати рости c перпендикуляр мебошад (расми 49). Аз нуқтаи дилхоҳи фазо A хатҳои рости a_1 ва c_1-ро мегузаронем, ки онҳо ба a ва c мувофиқан параллеланд. Аз параллелии a_1 ва a, инчунин a ва b мувофиқи теоремаи 4 бармеояд, ки хатҳои рости a_1 ва b параллеланд. Яъне кунҷи байни b ва c ба кунҷи байни a_1 ва c_1 баробар аст. Перпендикулярии хатҳои рости b ва c нишон дода шудааст.

Хосияти зерини муҳимми хатҳои рости перпендикулярро дар фазо бе исбот меорем, гарчанде исботаш на он қадар мураккаб аст. Вай хосияти маълумро аз планиметрия дар фазо умумият мебахшад.

Теоремаи 13. *Агар ду хати рости ҳамдигарро буранда ба ду хати рости перпендикуляр мувофиқан параллел бошанд, он гоҳ онҳо низ перпендикуляранд (расми 50). Яъне, агар* $a \perp b$, $a \| a_1$, $b \| b_1$ *бошад, он гоҳ* $a_1 \perp b_1$ *аст.*



Расми 50

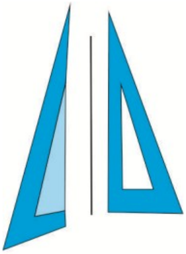


Расми 51

II. Акнун ба перпендикулярии хати рост ва ҳамворӣ машғул мешавем.

Таърифи 2. Хати росте, ки ҳамвориро мебурад, ба ин ҳамворӣ *перпендикуляр* номида мешавад, агар вай ба ҳар як хати росте, ки дар ин ҳамворӣ ҷойгир аст ва аз нуқтаи буриш мегузарад, перпендикуляр бошад (расми 51).

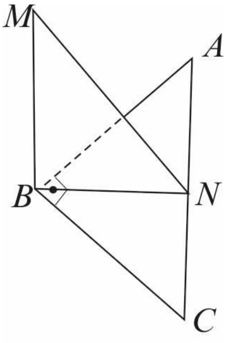
Чунин масъала мегузорем: чӣ тавр дар амалия перпендикулярии хати ростро ба ҳамворӣ муайян кардан мумкин аст? Барои ин ду санҷиш - гузоштани хаткашаки секунҷавӣ, тавре, ки дар расми 52 нишон дода шудааст, кифоя аст. Ин тарзи санҷиш ба чунин аломати перпендикулярии хати рост ва ҳамворӣ меорад, ки мо онро бе исбот қабул мекунем:



Расми 52

Теоремаи 14. *Агар хати рост ба ду хати рости ҳамдигарро бурандаи ҳамворӣ перпендикуляр бошад, он гоҳ вай ба ҳамворӣ перпендикуляр аст.*

Масъалаи 1. Дар секунҷаи росткунҷаи баробарпаҳлуи *ABC, AB=BC=4 см* аст. Нуқтаи *M* дар ҳамвории *ABC* ҷойгир нест ва нуқтаи *N* миёнаҷойи тарафи *AC* аст. Маълум аст, ки порчаи *MB* ба тарафҳои *AB* ва *BC* перпендикуляр буда, $MB=2\sqrt{2}$ *см* мебошад (расми 53). Дарозии порчаи *MN*-ро меёбем.



Расми 53

Ҳал. Тарафи *AC* гипотенуза аст. Барои ҳамин, мувофиқи теоремаи Пифагор ҳосил мекунем:

$$AC^2=AB^2+BC^2=4^2+4^2=32;\quad AC=\sqrt{32}=4\sqrt{2}\ см.$$

Аз сабаби он ки *BN* медиана ва ҳамзамон баландӣ мебошад, дорем:

$$BN=\sqrt{AB^2-AN^2}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{16-8}=2\sqrt{2}\ см.$$

MB ба BC ва AB перпендикуляр мебошад, барои ҳамин, мувофиқи теоремаи 14 MB ба ҳамвории ABC перпендикуляр аст, яъне MB ба BN низ перпендикуляр мешавад. Боз аз рӯйи теоремаи Пифагор пайдо мекунем:

$MN^2=MB^2+BN^2=8+8=16$. Аз ин ҷо $MN=4$ *см*.

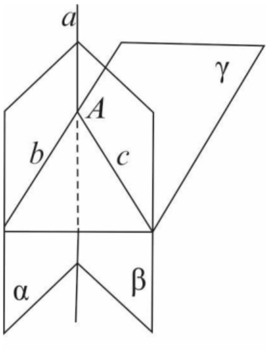
III. Акнун ба сохтани ҳамвории ба хати рост перпендикуляр, ки он аз нуқтаи додашуда мегузарад, машғул мешавем.

Масъалаи 2. Исбот мекунем, ки аз нуқтаи дилхоҳи фазо ягона ҳамвории ба хати рости додашуда перпендикуляр гузаронидан мумкин аст.

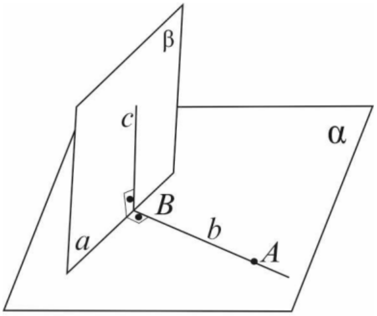
Ҳал. Мисли қисми I ду ҳолатро дида мебароем.

а) Нуқта дар хати рост ҷойгир аст.

Бигузор хати рости a дода шудааст ва нуқтаи A дар он ҷойгир аст (расми 54). Ду ҳамвории гуногуни α ва β-ро мегирем, ки хати a хати буриши онҳо аст. Мисли қисми I хати рости b-ро дар ҳамвории α месозем, ки он низ ба a перпендикуляр буда, аз нуқтаи A мегузарад. Мувофиқан хати рости c-ро дар β месозем, ки он низ ба a перпендикуляр буда, аз нуқтаи A мегузарад. Мувофиқи аксиомаи C_4 аз болои хатҳои рости b ва c ягона ҳамвории γ-ро гузаронидан мумкин аст. Инак, хати рости a ба ду хати рости ҳамдигарро бурандаи b ва c-и хамвории γ перпендикуляр аст. Пас, мувофиқи теоремаи 14 ҳамвории γ ва хати рости a байни худ перпендикуляранд.

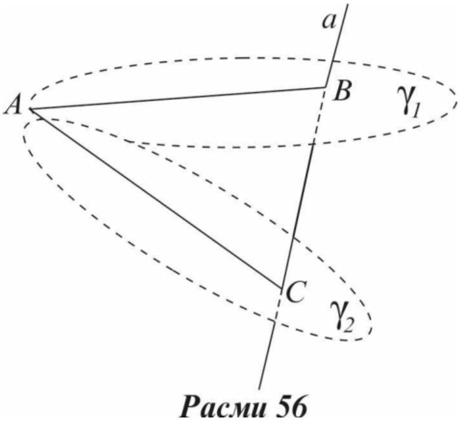


Расми 54



Расми 55

б) Нуқта дар хати рост ҷойгир нест. Бигузор a хати додашуда ва A нуқтаи дар он ҷойгирнабуда бошанд (расми 55). Хати рости a ва нуқтаи A ҳамвории α-ро муайян мекунанд. Дар ҳамвории α хати рости b-ро месозем, ки аз рӯйи нуқтаи A гузашта ба хати a перпендикуляр аст ва онро дар нуқтаи B мебурад (қисми I). Бигузор β ҳамвории дигарест, ки хати a-ро дар бар мегирад. Хати рости c- ро дар β месозем, ки a-ро дар нуқтаи B бурида, ба он перпендикуляр аст. Хатҳои рости b ва c ҳамдигарро дар нуқтаи B мебуранд, пас онҳо мувофиқи аксиомаи C_4 ҳамвории γ-ро яккимата муайян мекунанд. Аз сабаби перпендикулярии a ба ду хати b ва c-и ҳамдигарро бурандаи ҳамвории γ, мувофиқи теоремаи 14 хати рости a ба ҳамвории γ перпендикуляр аст.



Расми 56

Акнун ягона будани чунин ҳамвориро нишон медиҳем. Баръаксашро фарз мекунем. Яъне фарз мекунем, ки чунин ҳамвориҳо ақаллан дутоанд. Онҳоро бо γ_1 ва γ_2 ишорат мекунем (расми 56). Бигузор B нуқтаи буриши хати рости a бо γ_1 ва C нуқтаи буриши ин хат бо γ_2 аст. Ҳамин тариқ, дар ҳамвории α ба хати рости a ду перпендикуляри гуногуни AB ва AC-ро ҳосил мекунем, ки ин ба теоремаи планиметрии оид ба ягона будани перпендикуляр дар як ҳамворӣ зиддият мекунад.

Масъала пурра ҳал карда шуд. Акнун ҳақ дорем, ки *далели умдаро* баён кунем.

Теоремаи 15. *Аз нуқтаи дилхоҳи фазо ҳамвории ба хати рости додашуда перпендикулярро гузаронидан мумкин аст ва дар айни ҳол фақат якто.*

Эзоҳ. Дар қисми I-и ҳамин пункт чӣ тавр ба хати рости додашуда сохтани хати рости перпендикулярро, ки аз нуқтаи додашуда мегузарад, нишон дода будем. Айнан ҳамин тавр масъалаи аз нуқтаи додашуда ба ҳамворӣ сохтани хати рости перпендикуляр ва ягона будани онро муоина кардан мумкин аст. Мо тарзи ин созишро намеорем, вале аз ин натиҷаи умда, яъне аз дурустии он, дар оянда истифода мекунем, масалан, дар қисми II-и пункти баъдина ва дар пункти 10.

Саволу супоришҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Байни перпендикулярии хатҳои рост дар фазо ва дар ҳамворӣ чӣ фарқ ҳаст?

2. Оё аз нуқтаи дилхоҳи фазо ҳамвории ба хати рости додашуда перпедикулярро гузаронидан мумкин аст? Агар мумкин бошад, пас чандто?

3. Тасдиқот доир ба мавҷудият ва ягонагӣ оё дурустанд, агар хатҳои рост дар фазо муоина шаванд?

4. Дар теоремаи доир ба хатҳои росте, ки ба хатҳои рости перпендикуляр параллеланд, чӣ тасдиқ карда мешавад?

5. Таъриф ва аломати перпендикулярии хати рост ва ҳамвориро дар фазо оред. Бартарии аломат (теоремаи 14) нисбат ба таъриф дар чӣ зоҳир мегардад?

6. Мавҷудият ва ягонагии ҳамвориеро, ки аз нуқтаи додашуда гузашта, ба хати рост перпендикуляр аст, исбот кунед.

Масъалаҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

114. Оё тасдиқ кардан мумкин аст, ки хати росте, ки доираро дар марказ мебурад ва ба: а) диаметр: б) ду диаметр; в) радиус; г) ду радиус перпендикуляр аст, ба ҳамвории доира перпендикуляр мебошад?

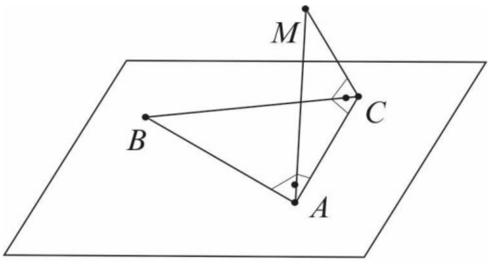
115. Аз нуқтаи A-и хати рости a ҳамвории β ва хати рости b гузаронида шудаанд, ки ҳар дуи онҳо ба a перпендикулярanд. Исбот кунед, ки хати рости b дар ҳамвории β ҷойгир аст.

116. Дар фазо се хати ростеро созед, ки онҳо аз рӯйи як нуқта гузашта, ҷуфт-ҷуфт перпендикуляр бошанд.

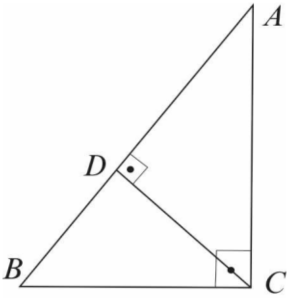
117. Нуқтаҳои K ва M миёнаҷойи теғаҳои AB ва DC-и тетраэдри мунтазами $ABCD$ мебошанд. Исбот кунед, ки хати рости KM ба хатҳои рости AB ва CD перпендикуляр аст.

118. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC кунҷи A рост аст. Нуқтаи M берун аз ҳамвории секунҷа ҳамин тавр ҷойгир аст, ки хати рости MA ба AB ва хати рости MC ба AC

перпендикуляранд. Исбот кунед, ки ҳамвории секунҷаи *ABC* ба *MC* перпендикуляр аст (расми 57).



Расми 57



Расми 58

Масъалаҳо барои такрор

119. Чор хати рости параллел дода шудааст. Исбот кунед, ки агар ягон ҳамворӣ ин хатҳои ростро дар қуллаҳои параллелограмм бурад, он гоҳ ҳамворие, ки ба ин хатҳои рост параллел нест, ин хатҳоро дар нуқтаҳои ягон параллелограмм мебурад.

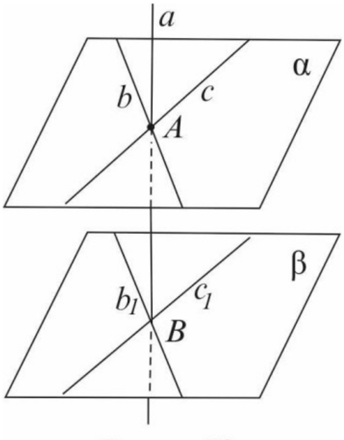
120. Яке аз катетҳои секунҷаи росткунҷаи *ABC* ба 15 *см* ва *BD* - проексияи катети дигар ба гипотенузаи *AB* ба 16 *см* баробар аст (расми 58). Радиуси давраи дарункашидаи секунҷаро ёбед.

121. Баландии ромб ба 10 *см*, кунҷи тезаш ба 30° баробар аст. Масоҳати ромбро ёбед.

9. Теоремаҳо дар бораи ду перпендикуляр. Перпендикуляр ва моил ба ҳамворӣ

I. Ба ду савол ҷавоб медиҳем: 1) доир ба хати росте, ки ба яке аз ҳамвориҳои параллел перпендикуляр аст, чӣ гуфтан мумкин аст? 2) доир ба перпендикулярҳо ба як ҳамворӣ чӣ гуфтан мумкин аст? Ҷавобҳо ва тарзи асосноккунии онҳо ба ин ду савол дар теоремаҳои зерин омадааст, ки онҳо ҳамчун теоремаҳо дар бораи ду перпендикуляр маъмуланд.

Теоремаи 16. *Агар хати рост ба яке аз ду ҳамвории бо ҳам параллел перпендикуляр бошад, он гоҳ вай ба дигараш ҳам перпендикуляр аст.*



Расми 59

Исбот. Фарз мекунем, ки α ва β ду ҳамвории параллел буда, хати рости a ба α перпендикуляр аст (расми 59). Нишон медиҳем, ки a ба β ҳам перпендикуляр мебошад. Аз сабаби перпендикулярии хати рости a ба α вай α-ро дар нуқтаи A мебурад. Мувофиқи хулосаи 4-и теоремаи 9 хати рости a бо ҳамвории параллел β дар нуқтаи B буриш дорад.

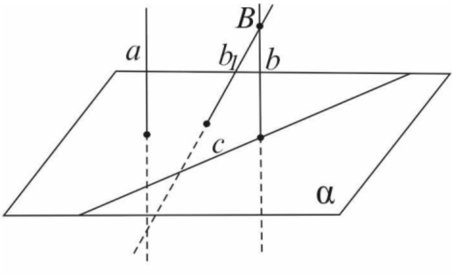
Дар ҳамвории α хатҳои рости b ва c-ро, ки дар нуқтаи A ҳамдигарро мебуранд, мегирем. Бигузор b_1 хати буриши ҳамвории β бо ҳамворие, ки онро хатҳои a ва b муайян мекунанд, бошад. Мувофиқан, бигузор c_1 хати буриши β бо ҳамворие аст, ки аз рӯйи хатҳои рости a ва c муайян мешавад. Мувофиқи теоремаи 10, агар ҳамвориҳои пераллел бо ҳамвории сеюм бурида шаванд, он гоҳ хатҳои буриш параллеланд, яъне b_1 ба b ва c_1 ба c параллел мебошанд. Азбаски хати a ба α перпендикуляр аст, пас мувофиқи таъриф вай ба хатҳои b ва c перпендикуляр мебошад. Аз ин бармеояд, ки хати рости a ба хати рости ба онҳо параллели b_1 ва c_1 низ перпендикуляр аст. Инак, хати рости a ба ду хати рости ҳамдигарро бурандаи ҳамвории β перпендикудяр мебошад. Аз ин ҷо мувофиқи теоремаи 14, a ба β перпендикуляр аст. Теорема пурра исбот шуд.

Теоремаи 17. *Агар яке аз хатҳои рости параллел ба ҳамворӣ перпендикуляр бошад, он гоҳ хати рости дигарӣ ҳам ба ин ҳамворӣ перпендикуляр аст.*

Исбот. Бигузор хатҳои рости a ва b бо ҳам параллеланд, α ҳамвориест, ки хати рости a ба он перпендикуляр мебошад. Нишон додан лозим аст, ки хати рости b ба β низ перпендикуляр мебошад.

Аз сабаби он ки a ба α перпендикуляр мебошад, a ба ҳар як хати дар α ҷойгирбуда перпендикуляр мебошад. Мувофиқи теоремаи 12 хати рости b низ ба ҳар як хати рости дар α ҷойгирбуда перпендикуляр аст. Мувофиқи таърифи перпендикулярии хати рост ба ҳамворӣ хати b ба α перпендикуляр мебошад. Теорема исбот шуд.

Теоремаи 18. *Ду хати росте, ки ба ҳамон як ҳамворӣ перпендикуля-ранд, параллел мебошанд.*



Расми 60

Исбот. Бигузор a ва b ду хати росте бошанд, ки ба ҳамвории α перпендикуляранд (расми 60). Фарз мекунем, ки тасдиқи теорема нодуруст аст, яъне a ва b параллел нестанд. Дар хати b

нуқтаи B-ро, ки ба α тааллуқ надорад, мегирем ва аз рӯйи он хати рости b_1-и ба a параллелро мегузаронем. Агар хатҳои b_1 ва b ҳамҷоя нашаванд, он гоҳ аз рӯйи онҳо ягона ҳамвории β-ро гузаронида метавонем. Бигузор хати рости c буриши ҳамвориҳои α ва β бошад. Азбаски b_1 ба a параллел ва a ба α перпендикуляр аст, пас мувофиқи теоремаи 17, b_1 ба α перпендикуляр аст, яъне b_1 ба c перпендикуляр аст. Вале мувофиқи шарт b ба α перпендикуляр мебошад. Ҳамин тариқ, аз нуқтаи B ба ҳамвории α дуто перпендикуляр (b ва b_1) мегузарад, ки ин номумкин аст. Пас, b_1 бо b ҳамҷоя мешаванд. Ин параллелии a ва b-ро нишон медиҳад. Теорема исбот шуд.

Масъалаи 1. Нишон медиҳем, ки агар ҳамвориҳои α ва β ба хати рости a перпендикуляр бошанд, он гоҳ онҳо параллеланд.

Ҳал. Аз сабаби перпендикулярии хати a ба α ва β ин хат онҳоро мебурад. Бигузор A ва B нуқтаҳои буришанд. Фарз мекунем, ки α ва β параллел нестанд, яъне нуқтаи умумии M доранд. Хати AM дар α ҷойгир аст, барои ҳамин a ба AM перпендикуляр аст. Мисли ҳамин, BM дар β буда, a ба BM перпендикуляр мебошад. Ҳамин тариқ, секунҷаи ABM дорои ду кунҷи рост аст, ки ин имконнопазир аст. Инак, ҳамвориҳои α ва β нуқтаи умумӣ надоранд, яъне онҳо параллеланд.

Эзоҳ. Амалан бо ҳалли масъалаи 1 нишон додаем, ки теоремаи 18 дуруст аст, агар дар он ба ҷойи ду хати рост ду ҳамворӣ ва ба ҷойи ҳамворӣ хати рост муоина карда шавад. Ҳаминро нисбат ба теоремаҳои 16 ва 17 ҳам гуфтан мумкин аст.

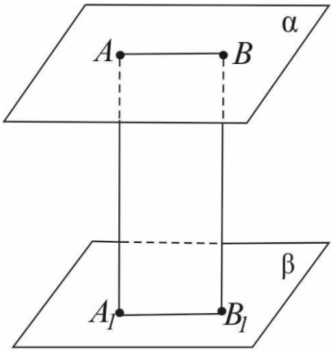
II. Мафҳуми *масофаро дар фазо* муайян мекунем. Тавре медонем, масофа аз нуқтаи *A* то хати рости *a* дар ҳамворӣ дарозии перпендикуляри *AB*, ки аз нуқтаи *A* ба нуқтаи *B*-и хати рости *a* гузаронида шудааст, мебошад. Айнан ҳамин тавр мафҳуми масофа аз нуқта то ҳамворӣ дар фазо дохил карда мешавад.

Таърифи 1. *Перпендикуляр* гуфта, порчаеро меноманд, ки аз нуқтаи додашуда ба ҳамвории додашуда гузаронида шуда, дар хати росте ҷойгир аст, ки ба ҳамворӣ перпендикуляр мебошад. Охири ин порча, ки дар ҳамворӣ ҷойгир аст, *асоси перпендикуляр* ном дорад. *Масофа аз нуқта то ҳамворӣ* гуфта, дарозии перпендикуляри аз ин нуқта ба ҳамворӣ гузаронидашударо меноманд.

Таърифи мазкур ба натиҷаи умдае, ки дар эзоҳи қисми **III**-и пункти 8 беисбот оварда шудааст, такя мекунад. Аз он ва аз сабаби ягона будани перпендикуляр, бармеояд ки масофа *яққимата* муайян карда мешавад.

Баъд, аз теоремаи 18 бармеояд, ки масофа аз ду нуқтаи гуногуни хати рост то ҳамвории ба вай параллел ба интихоби нуқтаҳо вобаста набуда, якхела аст. Барои ҳамин табиӣ аст, агар масофаро аз хати рост то ҳамвории ба вай параллел ҳамчун масофаи нуқтаи дилхоҳи хати рост то ҳамворӣ қабул кунем. Масалан, вақте мегӯянд, ки симҳои троллейбус аз замин 5 метр аст, ин маънои онро дорад, ки *масофаи байни хатҳои рост (сим) ва ҳамворӣ (сатҳи замин), ки ба он параллел* аст, 5 метр мебошад.

Масофаи байни ду хати рости параллел ҳам айнан ҳамин хел, ҳамчун масофа аз нуқтаи дилхоҳи як хати рост то хати рости дигар дохил карда мешавад. Дар ин ҷо ҳам масофа ба интихоби нуқта дар яке аз ин хатҳои рост вобастагӣ надорад. Чунки аз рӯйи ин ду хати рост мувофиқи аксиомаи C_2 танҳо як ҳамворӣ мегузарад ва дар ин ҳамворӣ масъалаи ёфтани масофаи ду хати рости параллел масъалаи планиметрӣ аст.



Расми 61

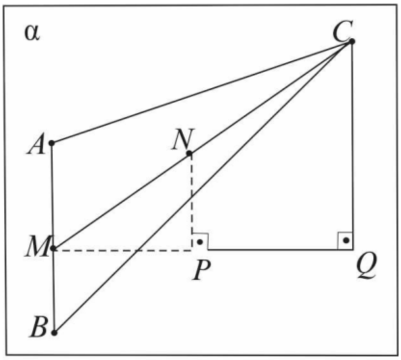
Акнун мафҳуми *масофаи байни ду ҳамвории параллелро* дохил мекунем. Дар ҳамвориҳои бо ҳам параллели α ва β мувофиқан нуқтаҳои дилхоҳи A, B ва A_1, B_1-ро чунон интихоб мекунем, ки хатҳои AA_1 ва BB_1 ба β перпендикуляр бошанд (расми 61). Мувофиқи теоремаи 18 ин хатҳо параллеланд, пас мувофики аксиомаи C_2 аз болои онҳо ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст.

Ин ҳамворӣ ҳамвориҳои α ва β-ро аз рӯйи хатҳои рости параллели AB ва A_1B_1 мебурад. Яъне ABB_1A_1 росткунҷа аст. Пас, $AA_1=BB_1$. Аз сабаби дилхоҳ будани нуқтаҳо аз ин ҷой бармеояд, ки масофа аз ягон нуқтаи α ё β то ҳамвории дигар бузургии доимӣ мебошад. Ин далел имконият медиҳад, ки масофаи байни ду ҳамвории параллел ҳамчун масофаи нуқтаи дилхоҳи якеи онҳо то ҳамвории дигарӣ дохил карда шавад.

Мисоли ҳамвориҳои параллел, масалан, ҳамвориҳои фарш ва шифти хона мебошад. Ҳар як нуқтаи шифт дар масофаи баробар аз фарш ҷойгир аст. Ин масофа баландии хона аст.

Масъалаи 2. Тарафи *AB*-и секунҷаи *ABC* дар ҳамвории α ҷойгир аст. Масофаи маркази секунҷа то ҳамвории α 4 см аст. Масофаро аз нуқтаи *C* то ҳамвории α меёбем.

Ҳал. Бо *M* миёнаҷойи тарафи *AB*, бо *N* маркази секунҷа, бо *P* ва *Q* асоси перпендикулярҳои аз нуқтаҳои *N* ва *C* ба α фуровардашударо ишорат мекунем (расми 62). Нуқтаҳои *C, M* ва *N* дар як хати рост ҷойгиранд. Хатҳои рости *NP* ва *CQ* ҳамчун хатҳои ба α перпендикуляр параллеланд (теоремаи 18), яъне дар як ҳамворӣ ҷойгиранд. Ин бошад, монандии секунҷаҳои *MNP* ва MCQ –ро нишон медиҳад, яъне $\frac{NP}{CQ}=\frac{MN}{MC}$ ва аз ин ҷо $CQ=\frac{MC}{MN}\cdot NP$. Мувофиқи хосияти медиана $\frac{MN}{MC}=\frac{1}{3}$ ё $\frac{MC}{MN}=3$. Ин баробарӣ ва шарти масъаларо истифода карда, меёбем: *CQ=3·4=12 см.*

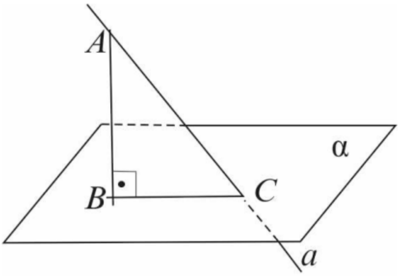


Расми 62

III. Якчанд мафҳуми навро дохил мекунем.

Таърифи 2. Хати росте, ки ҳамвориро бурида ба он перпендикуляр нест, *хати рости моил* ном дорад.

Ҳар гуна порчаи ин хат, ки яке аз охирҳояш (нӯгҳояш) дар ҳамворӣ ҷойгир аст, моил номида мешавад. Порчае, ки нуқтаҳои асосҳои перпендикуляр ва моили аз худи ҳамон як нуқта гузаронидашударо пайваст мекунад, проексияи моил ном дорад. Дар расми 63 аз нуқтаи *A* ба ҳамвории *α* перпендикуляри *AB* ва моили *AC* гузаронида шудааст. Нуқтаи *B* асоси перпендикуляр, нуқтаи *C* асоси моил, *BC* проексияи моили *AC* дар ҳамвории α аст. Баъзан *BC*-ро проексияи ортогоналии моил ҳам меноманд, чунки ҳар гуна нуқтаи порчаи *BC* нуқтаи буриши перпендикуляри аз нуқтаи порчаи *AC* ба ҳамвории α гузаронидашуда мебошад.



Расми 63

Мисли планиметрия дар фазо ҳам теоремаи зерин ҷой дорад:

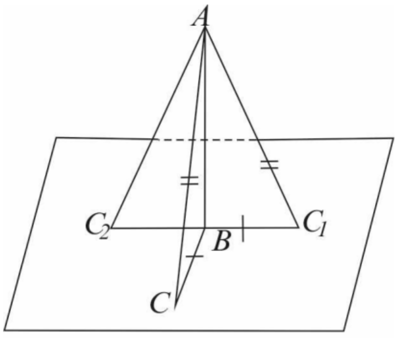
Теоремаи 19. *Бигузор аз нуқтае, ки дар ҳамворӣ ҷойгир нест, перпендикуляр ва моилҳо ба ҳамворӣ гузаронида шудаанд. Он гоҳ:*

1) моилҳое, ки проексияи баробар доранд, баробаранд;

2) аз ду моил ҳамонаш калон аст, ки дорои проексияи калон аст;

3) перпендикуляр аз ҳар гуна моил хурд аст.

Исбот. Аз нуқтаи *A*-и берун аз ҳамворӣ перпендикуляри *AB*, моилҳои *AC*, AC_1 ва AC_2- ро мегузаронем. Моил, проексияи он ва перпендикуляр дар



Расми 64

як ҳамворӣ ҷойгиранд ва секунҷаи росткунҷаи ABC- ро ташкил медиҳанд (расми 64), бинобар ин онҳо байни худ бо теоремаи Пифагор алоқамanданд:

$$AC^2=BC^2+AB^2;$$

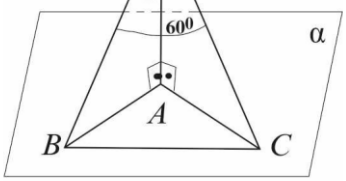
$$AC_1^2=BC_1^2+AB^2;$$

$$AC_2^2=BC_2^2+AB^2.$$

Аз ин ҷо, агар $BC=BC_1$ бошад, пас $AC=AC_1$ мешавад.

Баъд, агар $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}<BC_2=\sqrt{AC_2^2-AB^2}$ бошад, он гоҳ $AC<AC_2$. Дар охир, аз баробарии $AC^2=BC^2+AB^2$ бармеояд, ки $AB<AC$ аст. Теорема исбот шуд.

Масъалаи 3. Секунҷаи баробарпаҳлуи ABC $(AB=AC)$ дар ҳамвории α ҷойгир аст. Нуқтаи A асоси перпендикуляри аз нуқтаи M ба α гузаронидашуда мебошад. Маълум аст, ки дарозии перпендикуляр $3\sqrt{2}$ см буда, кунҷҳои BMA ва BMC мувофиқан ба 45^0 ва 60^0 баробаранд. Дарозии BC-ро меёбем.



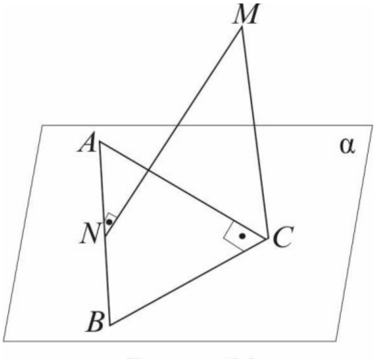
Расми 65

Ҳал. Моилҳои MB ва MC-ро мегузаронем (расми 65). Аз баробарии тарафҳои AB ва AC ва инчунин теоремаи 19 бармеояд, ки ин моилҳо бо ҳам баробаранд. Кунҷи BMC 60^0 аст, пас секунҷаи MBC баробартараф мебошад, яъне $BC=BM=MC$. Аз секунҷаи росткунҷаи ABM дорем:

$$\frac{AM}{BM}=\cos 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}, BM=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot AM=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot 3\sqrt{2}=6 \text{ см.}$$

Ҳамин тариқ, $BC=BM=6см$.

Масъалаи 4. Аз нуқтаи M ба қуллаи кунҷи рости C ва миёнаҷойи тарафи AB-и секунҷаи росткунҷаи ABC, ки дар ҳамвории α воқеъ аст, перпендикулярҳо гузаронида шудаанд. Кунҷи A-ро меёбем.



Расми 66

Ҳал. Бигузор N миёнаҷойи тарафи AB-и секунҷаи росткунҷаи ABC аст (расми 66). Азбаски $AN=NB$ мебошад, пас мувофиқи теоремаи 19 $MA=MB$. Аз перпендикулярии MC ба α бармеояд, ки MC ба CA ва CB перпендикуляр аст.

Мувофиқи теоремаи Пифагор дорем:

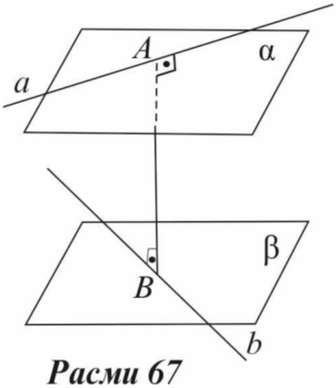
$$CA=\sqrt{MA^2-MC^2} \text{ ва } CB=\sqrt{MB^2-MC^2}.$$

Вале $MA=MB$, пас $CA=CB$. Инак, ABC секунҷаи росткунҷаи баробарпаҳлу мебошад. Аз ин ҷо $\angle A=45^0$.

IV. Аз мафҳумҳои имконпазири масофаҳо дар фазо (масофа аз нуқта то хати рост ё то ҳамворӣ, масофаи байни хатҳои рости параллел ё ҳамвориҳои параллел) дохил кардани мафҳуми масофаи байни хатҳои чиликӣ монда аст.

Таърифи 3. *Перпендикуляри умумии ду ҳамвории параллел* гуфта, порчаеро меноманд, ки охирҳояш (нӯгҳояш) дар ин ҳамвориҳо ҷойгир буда, ба ҳар кадоми ин ҳамвориҳо перпендикуляр аст.

Аз ин ҷой ва аз таърифи масофаи байни ду ҳамвории параллел бармеояд, ки ин масофа ба дарозии перпендикуляри умумии ин ду ҳамворӣ баробар аст.



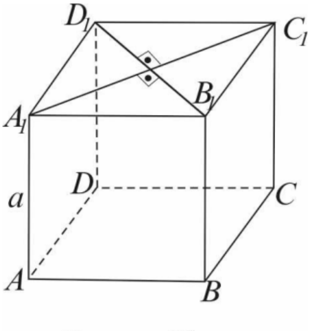
Расми 67

Бигузор *a* ва *b* ду хати рости чиликӣ бошанд (расми 67). Нишон додан мумкин аст, ки аз рӯйи онҳо ягона ҷуфти ҳамвориҳои параллели α ва β-ро гузаронидан мумкин аст (бо истифодаи натиҷаҳои пункти 7). Масофаи байни ин ду ҳамвории параллел ҳамчун масофаи байни хатҳои рости чиликӣ қабул карда мешавад. Тавре гуфта шуд, вай ба дарозии перпендикуляри умумии ин ҳамвориҳо баробар аст. Агар охирҳои перпендикуляри умумии ин ҳамвориҳо дар ин хатхои рост ҷойгир бошанд, он гоҳ вай перпендикуляри умумии ду хати рости чиликӣ номида мешавад.

Инак, масофаи байни ду хати рости чиликӣ ба дарозии перпендикуляри умумии онҳо баробар аст. Дар расми 67 масофаи байни хатҳои рости чиликии *a* ва *b* ба дарозии порчаи *AB*, ки ба ҳамвориҳои α ва β перпендикуляр буда, охирҳояш дар хатҳои *a* ва *b* ҷойгиранд, баробар мебошад.

Исбот кардан мумкин аст, ки ду хати рости чиликӣ перпендикуляри умумӣ доранд ва дар айни ҳол фақат якто. Мо исботи ин тасдиқро наоварда, фақат ҳаминро қайд мекунем, ки аз он яккимата будани масофаи байни ду хати рости чиликӣ бармеояд.

Масъалаи 5. Теғаи куб ба *a* баробар аст. Масофаи байни хатҳои рости CC_1 ва B_1D_1-ро меёбем (расми 68).



Расми 68

Ҳал. Диагонали A_1C_1-и рӯяи $A_1B_1C_1D_1$-ро мегузаронем. Хати рости A_1C_1 ба хатҳои рости C_1C ва B_1D_1, ки низ аз рӯйи диагонали рӯя мегузарад, перпендикуляр мебошад.

Перпендикуляри умумӣ барои ин ду хати рост порчаи C_1O мешавад. Секунҷаи OB_1C_1 росткунҷа ва баробарпаҳлу аст. Барои ҳамин кунҷҳои назди асоси B_1C_1 ба 45^0 баробар мебошанд. Пас,

$$OC_1 = B_1C_1 \cdot \sin 45^0 = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Саволу супоришҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Теоремаҳоро дар бораи ду перпендикуляр баён кунед. Ҷавоби кадом масъалаҳо дар онҳо мавҷуд аст?

2. Масофа аз нуқта то ҳамворӣ, аз хати рост то ҳамвории ба он параллел, байни ду ҳамвории бо ҳам параллел чӣ тавр муайян карда мешавад?

3. Перпендикуляр ва моил ба ҳамворӣ чӣ аст? Асоси онҳо - чӣ? Проексияи моил - чӣ?

4. Дарозиҳои перпендикуляр, моил ва проексияи он бо ҳамдигар чӣ гуна алоқамандӣ доранд?

5. Байни дарозии ду моил, ки аз як нуқта гузаронида

шудаанд ва дарозии проексияи онҳо чӣ хел алоқамандӣ вуҷуд дорад?

6. Перпендикуляри умумии ду хати рости чиликӣ чӣ тавр муайян карда мешавад?

7. Масофаи байни хатҳои рости чиликӣ чӣ тавр ёфта мешавад?

Масъалаҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

122. Исбот кунед, ки агар хати рост ба ҳамворӣ параллел бошад, он гоҳ ҳамаи нуқтаҳои он аз ҳамворӣ дар як хел масофа ҷойгиранд.

123. Исбот кунед, ки масофа аз ҳар як нуқтаи ҳамворӣ то ҳамвории ба он параллел якхела аст.

124. Исбот кунед, ки агар хати рост ва ҳамворӣ параллел бошанд, он гоҳ онҳо перпендикуляри умумӣ доранд.

125. Магар ду тарафи секунҷа ба як ҳамворӣ перпендикуляр шуда метавонад? Ду тарафи трапетсия - чӣ?

126. Охирҳои порчаи додашуда, ки ҳамвориро намебурад, аз ҳамворӣ дар масофаи *0,3 м* ва *0,5 м* ҷойгиранд. Нуқтае, ки ин порчаро бо нисбати 3:7 мебурад, дар кадом масофа ҷойгир аст?

127. Аз миёнаҷойи порча ҳамворӣ гузаронида шудааст. Исбот кунед, ки охирҳои ин порча аз ин ҳамворӣ дар масофаи якхела ҷойгиранд.

128. Масофаро аз миёнаҷойи порчаи AB то ҳамворӣ, ки ин порчаро намебурад, ёбед, агар масофа аз нуқтаҳои A ва B то ҳамворӣ ба: 1) *3 м* ва *5 м*; 2) a ва b баробар бошад.

129. Аз рӯйи тарафи параллелограмм ҳамворӣ гузаронида шудааст, ки вай аз тарафи муқобил хобидаи параллелограмм дар масофаи *a* ҷойгир аст. Масофаро аз нуқтаи буриши диагоналҳои параллелограмм то ин ҳамворӣ ёбед.

130. Сими телефон, ки дарозиаш *15 м* аст, аз симчӯб то боми хона кашида шудааст. Сим дар симчӯб дар баландии *8 м* ва дар бом дар баландии *20 м* баста шудааст. Масофаи байни симчӯб ва боми хонаро ҳисоб кунед, агар маълум бошад, ки сим хам намезанад.

131. Масофа аз нуқтаи А то қуллаҳои квадрат ба *a* баробар аст. Масофаро аз нуқтаи А то ҳамвории квадрат ёбед, агар тарафи квадрат ба *b* баробар бошад.

132. Аз нуқта ба ҳамворӣ ду моил, ки яке аз дигараш *26 см* дароз аст, гузаронида шудааст. Проексияи моилҳо ба *12 см* ва *40см* баробаранд. Дарозии моилҳо ёфта шавад.

133. Аз нуқта ба ҳамворӣ ду моил гузаронида шудааст. Дарозии моилҳоро ёбед, агар онҳо ҳамчун 1:2 нисбат дошта, проексияи моилҳо 1 *см* ва 7 *см* бошад.

134. Аз нуқтаи додашуда ба ҳамворӣ ду хати рости моили дарозиашон 2 *м* гузаронида шудааст. Масофаро аз нуқта то ҳамворӣ ёбед, агар моилҳо байни худ кунҷи 60^0-ро ташкил дода, проексияашон бо ҳам перпендикуляр бошанд.

135*. Аз рӯйи як тарафи ромб дар масофаи 4 *м* аз тарафи муқобил ҳамворӣ гузаронида шудааст. Проексияи диагоналҳои ромб ба ин ҳамворӣ ба 8 *м* ва 2 *м* баробар аст. Проексияи тарафҳоро ёбед.

136*. Дар секунҷаи баробарпаҳлу асос ва баландӣ ба *4 м* баробаранд. Нуқтаи додашуда дар масофаи *6 м* аз ҳамвории секунҷа ва аз қуллаҳои секунҷа дар масофаҳои баробар ҷойгир аст. Ин масофаҳоро ёбед.

137. Теғаи куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ 2 *м* аст. Масофаи байни хатҳои рости: 1) AB ва CC_1; 2) CC_1 ва BD-ро ёбед.

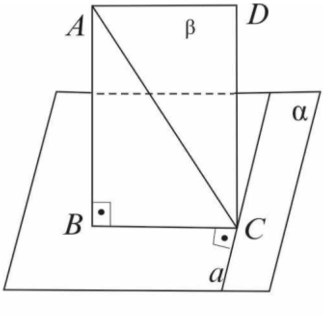
Масъалаҳо барои такрор

138. Дар тарафҳои $AB=6$ *см* ва $BC=8$ *см*-и росткунҷаи $ABCD$ нуқтаҳои M ва N тавре гирифта шудаанд, ки порчаи MN ба порчаи AC параллел мебошад. Маълум аст, ки периметри бисёркунҷаи $AMNCD$ ба периметри секунҷаи MBN ҳамчун 7:3 нисбат дорад. Дарозии порчаи MN-ро ёбед.

139. Тарафҳои секунҷа a,b,c дода шудаанд. Кунҷҳои онро ёбед.

10. Теорема дар бораи се перпендикуляр

Теоремаи 20. *Барои он ки хати рости дар ҳамворӣ ҷойгирбуда ва аз асоси моил гузаранда ба моил перпендикуляр бошад, зарур ва кифоя аст, ки вай ба проексияи ҳамин моил перпендикуляр шавад.*



Расми 69

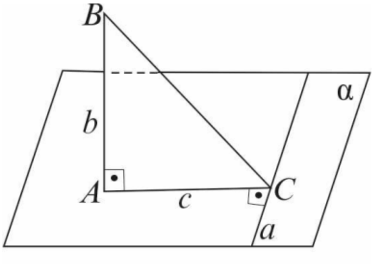
Исбот. а) *Шарти кифоягӣ.* Исбот кардан лозим, ки агар хати рост аз асоси моил гузашта ба проексияи ҳамин моил перпендикуляр бошад, он гоҳ вай ба худи моил низ перпендикуляр мебошад. Яъне, агар AB -

перпендикуляр ба ҳамвории α бошад, AC - моил, BC - проексияи моил ва a хати ростест, ки дар ҳамвории α ҷойгир буда, аз асоси моил C мегузарад (расми 69) бошанд, он гоҳ нишон додан лозим аст, ки ҳангоми $a \perp CB$ будан, $a \perp AC$ аст. Аз нуқтаи C-и ҳамвории α хати рости CD-ро, ки ба α перпендикуляр аст, мегузаронем (ниг. ба эзоҳи қисми III-и п.8). Мувофиқи теоремаи 18 вай ба хати рости AB параллел аст. Аз рӯйи ин ду хати рости параллел ҳамвории β-ро мегузаронем. Хати рости a ба хати рости CD перпендикуляр аст, зеро аз нуқтаи буриши CD бо ҳамвории α гузашта, дар он ҷойгир аст. Ҳамин тариқ, хати рости a бо ду хати рости ҳамдигарро бурандаи ҳамвории β (CB ва CD) перпендикуляр аст. Пас, мувофиқи теоремаи 14 хати рости a ба ҳамвории β перпендикуляр аст. Аз сабаби дар ҳамвории β ҷойгир будани моили AC ва хати рости a-ро буридани он, моил ва ин хат перпендикулярaнд. Шарти кифоягӣ исбот шуд.

б) *Шарти зарурӣ.* Исбот кардан лозим аст, ки агар хати рост аз асоси моил гузашта ба моил перпендикуляр бошад, он гоҳ вай ба проексияи моил низ перпендикуляр мебошад. Яъне, агар $a \perp AC$ бошад, он гоҳ $a \perp BC$ мешавад. Боз ҳосил мекунем, ки хати рости a ба ду хати рости AC ва CD-и ҳамвории β, ки ҳамдигарро дар нуқтаи C мебуранд, перпендикуляр аст. Яъне мувофиқи теоремаи 14 хати рости a ба ҳамвории β перпендикуляр мебошад. Бинобар ин хати рости a ба проексияи моил BC, ки дар β ҷойгир аст, перпендикуляр мешавад. Шарти зарурӣ ва бо он теорема пурра исбот карда шуд.

Акнун масъалаеро муоина мекунем, ки дар ҳалли он теорема дар бораи се перпендикуляр истифода мешавад.

Масъала. Аз охири A-и порчаи AB, ки дарозиаш b аст, ҳамвории ба порча перпендикуляр ва дар ин ҳамворӣ хати рости a гузаронида шудаанд. Масофаро аз нуқтаи B то хати рост меёбем, агар масофа аз нуқтаи A то хати рост ба c баробар бошад.



Расми 70

Ҳал. Хати рости BC-ро, ки ба a перпендикуляр аст, мегузаронем (расми 70). AC - проексияи моили BC мувофиқи теорема дар бораи се перпендикуляр низ ба a перпендикуляр мебошад, барои ҳамин $AC = c$ аст. Баъд, азбаски BA ба ҳамвории β перпендикуляр аст, пас кунҷи BAC рост мебошад ва аз рӯйи теоремаи Пифагор ҳосил мекунем:

$$BC^2 = AB^2 + CA^2.$$

Ҳамин тариқ, масофаи матлуб ба $BC = \sqrt{b^2 + c^2}$ баробар аст, чунки $AB=b$ ва $CA=c$ мебошанд.

Саволу супоришҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Теоремаро дар бораи се перпендикуляр баён кунед.

2. Дар исботи ин теорема дар куҷо ва чӣ тавр теоремаҳо дар бораи ду перпендикуляр (теоремаи 18) ва аломати перпендикулярии хати рост ва ҳамворӣ (теоремаи 14) истифода карда мешаванд?

3. Дар раванди исботи теорема дар бораи се перпендикуляр, теоремаи 14 чанд маротиба истифода мешавад?

4. Моҳияти шарти зарур ва кифояро дар мисоли теоремаи 20 фаҳмонед.

Масъалаҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

140. Аз маркази давраи дарункашидаи секунҷа ба ҳамвории секунҷа перпендикуляри дарозиаш *2,4 м* гузаронида шудааст. Радиуси давра *0,7 м* аст. Масофаро аз охири ин перпендикуляр то тарафи наздиктарини секунҷа ёбед.

141. Аз қуллаи A-и росткунҷаи $ABCD$ ба ҳамвории он перпендикуляри AK гузаронида шудааст. Масофаҳо аз нуқтаи охири K-и ин перпендикуляр то қуллаҳои дигар ба 6 *м*, 1 *м* ва 9 *м* баробаранд. Дарозии AK-ро ёбед.

142. Нуқтаи M, ки берун аз ҳамвории кунҷи рости додашуда ҷойгир аст, аз қуллаи кунҷ дар масофаи a ва аз тарафҳои кунҷ дар масофаи b мехобад. Масофаро аз нуқтаи M то ҳамвории кунҷ ёбед.

143. Масофа аз нуқтаи додашуда то ҳамвории секунҷа 1,1 *м* ва то ҳар як тарафи он 6,1 *м* аст. Радиуси давраи дарункашидаи ин секунҷаро ёбед.

144. Аз қуллаи секунҷаи баробартарафи ABC перпендикуляри AD ба ҳамвории секунҷа гузаронида шудааст. Масофаро аз нуқтаи D то тарафи BC ёбед, агар $AD=13$ *см* ва $BC=6$ *см* бошад.

145. Масофа аз нуқтаи A то ҳар як тарафи квадрат ба a баробар аст. Масофаро аз нуқтаи A то ҳамвории квадрат ёбед, агар диагонали квадрат ба d баробар бошад.

Масъалаҳо барои такрор

146. Аз ду нуқтаи гуногуни дар ҳамворӣ ҷойгирнабуда ба ин ҳамворӣ ду моили баробар фуроварда шудааст. Магар гуфтан мумкин аст, ки проексияи онҳо низ баробар мешаванд?

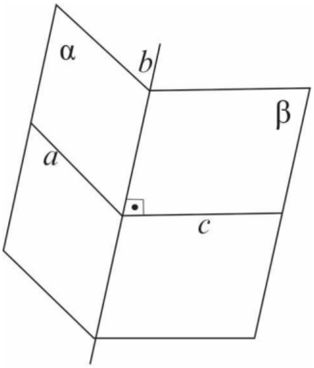
147. Масоҳати секунҷаи росткунҷа ба S, гипотенузааш ба c баробар аст. Радиуси давраи дарункашидаро ёбед.

148*. Дар девори амудӣ дар баландии *5 м* плакат овехта шудааст, ки дарозиаш 2 *м* аст. Мушоҳид аз девор дар кадом масофа бояд истад, то кунҷе, ки зери он плакат дида мешавад, калонтарин шавад?

11. Перпендикулярии ду ҳамворӣ

I. Мафҳуми перпендикулярии ду ҳамвориро дида мебароем.

Таъриф. Агар ҳамворӣ хати рости ба дигар ҳамворӣ перпендикулярро дошта бошад, он гоҳ вай ба дигарӣ *перпендикуляр* номида мешавад.



Расми 71

Фарз мекунем, ки ҳамвории α ба ҳамвории β перпендикуляр аст, яъне хати рости a-и он ба β перпендикуляр мебошад (расми 71). Мувофиқи таърифи перпендикулярии хати рост ва ҳамворӣ (пункти 8) хати рости a ҳамвории β-ро мебурад. Бигузор нуқтаи буриши ин хат A аст. Аз сабаби нуқтаи умумӣ доштан ҳамвориҳои α ва β ҳамдигарро аз рӯйи хати рости b мебуранд ва нуқтаи A ба b таъаллуқ дорад. Аз нуқтаи A дар ҳамвории β хати рости c-ро, ки ба хати b перпендикуляр аст, мегузаронем. Дар натиҷа хати рости c ба ду хати рости ҳамдигарро бурандаи a ва b, ки перпендикуляранд ва дар ҳамвории α ҷойгиранд, перпендикуляр мешавад (теоремаи 14). Натиҷаи зерин ҳосил шудааст, ки онро дар шакли теорема меорем.

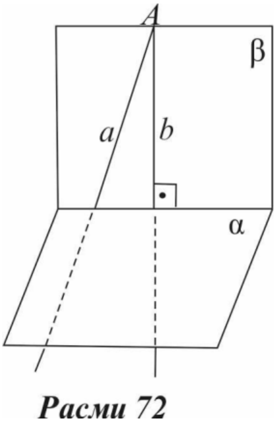
Теоремаи 21. *Агар яке аз ҳамвориҳо ба дигараш перпендикуляр бошад, он гоҳ дигарӣ ҳам ба аввалааш перпендикуляр аст.*

Акнун бо созишҳо, ки бо ҳамвориҳои перпендикуляр алоқамандaнд, машғул мешавем.

Масъалаи 1. Бигузор ҳамвориҳои α ва β перпендикуляранд. Нишон медиҳем, ки аз рӯйи нуқтаи дилхоҳи якеи онҳо ба дигарӣ хати рости перпендикулярро гузаронидан мумкин аст.

Ҳал. Фарз мекунем, ки хати рости a дар ҳамвории α ҷойгир буда, ба ҳамвории β перпендикуляр аст. Хати рости a ба хати буриши онҳо b перпендикуляр мебошад. Аз нуқтаи дилхоҳи ҳамвории α хати рости ба a параллелро гузаронида, мебинем, ки мувофиқи теоремаи 12 ин хат низ ба хати буриш b перпендикуляр аст. Боз аз нуқтаи буриши ин хат дар ҳамвории β хати рости ба b перпендикулярро сохта, мисли исботи теоремаи 21 мулоҳиза ронда, перпендикулярии хати ба a параллел бударо бо ҳамвории β нишон медиҳем. Масъала ҳал шуд.

Масъалаи 2. Хати рости a ва ҳамвории α дода шудаанд. Аз рӯйи хати рости a ҳамвории ба ҳамвории α перпендикуляр месозем.



Расми 72

Ҳал. Аз рӯйи нуқтаи дилхоҳи хати рости a хати рости b -ро мегузаронем (расми 72), ки ба ҳамвории α перпендикуляр аст (ниг. ба эзоҳи қисми III-и пункти 8).

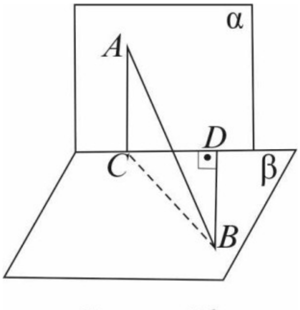
Аз рӯйи хатҳои рости a ва b ҳамвории β-ро мегузаронем. Мувофиқи таъриф ҳамвории β ба ҳамвории α перпендикуляр мебошад.

Аз созишҳои дар исботи теоремаи 21 ва ҳалли масъалаи 1 иҷро кардаамон дурустии ҷумлаи зерин бармеояд, ки он ҳангоми ҳалли масъалаҳо бисёртар (нисбат ба таърифи ҳамин пункт) истифода карда мешавад.

Теоремаи 22. *Агар хати рост дар яке аз ду ҳамвории перпендикуляр ҷойгир буда, ба хати буриши онҳо перпендикуляр бошад, он гоҳ вай ба дигар ҳамворӣ ҳам перпендикуляр аст.*

Ин натиҷа як аломати дигари перпендикулярии хати рост ба ҳамворӣ мебошад. Истифодаи онро дар ҳалли масъалаи зерин муоина мекунем.

Масъалаи 3. Аз нуқтаҳои A ва B, ки дар ду ҳамвории бо ҳам перпендикуляр ҷойгиранд, ба хати рости буриши ҳамвориҳо перпендикулярҳои AC ва BD гузаронида щудааст. Дарозии порчаи CD-ро меёбем, агар $AB=11$ *м*, $AC=6$ *м* ва $BD=7$ *м* бошад.



Расми 73

Ҳал. Азбаски хатҳои рости AC ва CD, инчунин ҳамвориҳои α ва β бо ҳам перпендикуляранд (расми 73), пас мувофиқи теоремаи 22 хати рости AC ба ҳамвории β ва ба хати рости CB перпендикуляр мебошад. Яъне секунҷаи ABC росткунҷа аст. Аз он мувофиқи теоремаи Пифагор дорем:

$$AB^2=AC^2+CB^2.$$

Секунҷаи CBD низ росткунҷа аст. Аз он ҳосил мекунем:

$$CB^2=BD^2+CD^2 \quad \text{ва} \quad AB^2=AC^2+BD^2+CD^2,$$

ё ки

$$CD^2=AB^2-BD^2-AC^2=11^2-7^2-6^2=121-49-36=36.$$

Ҷавоб: $CD=6$ *м*.

Эзоҳи 1. Аз исботи теоремаи 21 ва созишҳо бармеояд, ки таърифи перпендикулярии ду ҳамворӣ ба *таърифи зерин баробарқувва* аст: ду ҳамвории ҳамдигарро буранда *перпендикуляр* номида мешаванд, агар ҳамвории ба хати рости буриши ин ҳамвориҳо перпендикулярбуда онҳоро аз рӯйи хатҳои рости бо ҳам перпендикуляр бурад.

Дар ҳақиқат, агар ҳамвории γ ба хати рости b - хати буриши ҳамвориҳои α ва β перпендикуляр бошад, он гоҳ вай ҳамвориҳои α ва β-ро аз рӯйи хатҳои рости бо ҳам перпендикуляри a ва c мебурад (расми 71). Аз перпендикулярии a бар b ва c, перпендикулярии α бар β

бармеояд. Баръакс, агар α бар β перпендикуляр бошад, он гоҳ созишҳои дар нақшаи 71 иҷрокардаамонро гузаронида, аз болои хатҳои a ва c ҳамвории γ-ро мегузаронем. Вай ба хати буриш b перпендикуляр мебошад (теоремаи 14).

Эзоҳи 2. Пурсида мешавад, ки чӣ тавр перпендикуляр будани ҳамвории β-ро ба ҳамвории додашудаи α санҷидан мумкин аст? Ба ибораи дигар, барои ҳамвории α чӣ тавр ҳамвории ба он перпендикуляри β-ро сохтан мумкин аст? Дар амалия бо ёрии шоқул амудӣ будани девор муайян карда мешавад. Таърифи дар аввали пункт овардашуда дарки ҳамин чиз аст (ниг. инчунин ба масъалаи 2).

II. Алоқамандии перпендикулярии ҳамвориро бо ҳамвориҳои параллел муқаррар мекунем.

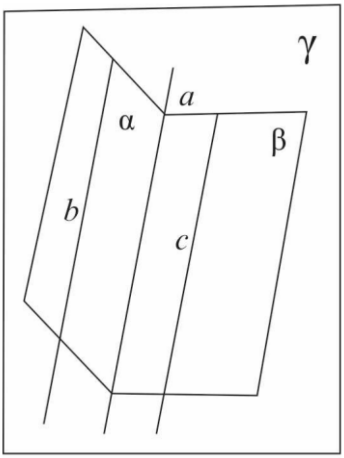
Теоремаи 23. *Агар ҳамворӣ ба яке аз ҳамвориҳои параллел перпендикуляр бошад, он гоҳ ба дигараш ҳам перпендикуляр мебошад.*

Исбот. Бигузор ҳамвориҳои α ва β параллеланд ва ҳамвории γ ба α перпендикуляр мебошад. Мувофиқи таъриф дар γ хати росте мавҷуд аст, ки он ба α перпендикуляр аст. Мувофиқи теоремаи 16 ин хат ба ҳамвории β ҳам перпендикуляр мебошад. Ин бошад, ба перпендикулярии γ бар β меорад.

Теоремаи 24. *Агар хати рост ба яке аз ҳамвориҳо перпендикуляр ва ба ҳамвории дигар параллел бошад, он гоҳ ҳамвориҳо перпендикуляранд.*

Исбот. Дар ҳамвории ба хати рост параллел мувофиқи теоремаи 5 хати рости ба вай параллел вуҷуд дорад. Аз рӯйи теоремаи 17 ин хати рост ба ҳамвории ба хати рост перпендикулярбуда перпендикуляр аст. Барои ҳамин ҳамвориҳо мувофиқи таъриф перпендикуляранд.

Масъалаи 4. Маълум аст, ки ду ҳамвории ҳамдигарро бурандаи α ва β ба ҳамвории додашудаи γ перпендикуляранд. Нишон медиҳем, ки хати рости буриши α ва β ба γ перпендикуляр аст.



Расми 74

Ҳал. Фарз мекунем, ки хати рости буриши ҳамвориҳо α мебошад. Аз сабаби перпендикулярии α бар γ дар α хати рости b-ро ёфтан мумкин аст, ки вай ба γ перпендикуляр аст. Мувофиқан, аз сабаби перпендикулярии β ва γ дар β хати рости c мавҷуд аст, ки вай ба γ перпендикуляр мебошад (расми 74). Аз рӯйи теоремаи 18 ду хати рости b ва c-и ба ҳамвории γ перпендикуляр байни худ параллел мешаванд, яъне хатҳои b ва c параллел мебошанд. Аз ин сабаб ва аз сабаби он ки онҳо дар ҳамвориҳои гуногун ҷойгиранд, бармеояд, ки ин хатҳои рост ба хати рости буриши ин ҳамвориҳо a параллеланд. Аз ин ҷо ва аз перпендикулярии хатҳои рости b ва c бар γ мувофиқи теоремаи 17, бармеояд, ки хати рости a ба ҳамвории γ перпендикуляр мебошад.

Саволу супоришҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Дар кадом ҳолат ду ҳамворӣ дар фазо перпендикуляр номида мешаванд?

2. Нишон диҳед, ки агар як ҳамворӣ ба дигараш перпендикуляр бошад, он гоҳ дигарӣ ҳам ба ҳамвории аввала перпендикуляр аст.

3. Аломати перпендикулярии хати рост ба ҳамворӣ (теоремаи 22) аз аломатҳои пешовардашуда чӣ фарқ дорад?

4. Доир ба алоқамандии перпендикулярии ҳамворӣ бо ҳамвориҳои параллел чӣ гуфтан мумкин аст?

Масъалаҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

149. Ҳамвориҳои бо ҳам перпендикуляри α ва β дода шудаанд. Аз рӯйи нуқтаи A-и ҳамвории α хати рости a гузаронида шудааст, ки ба ҳамвории α перпендикуляр мебошад. Исбот кунед, ки хати рости a дар ҳамвории β ҷойгир аст.

150. Ҳамвориҳои α ва β перпендикуляранд. Дар ҳамвории α нуқтаи A гирифта шудааст, ки масофа аз он то хати рости c (хати рости буриши ҳамвориҳо) ба *0,5 м* баробар аст. Дар ҳамвории β хати рости b, ки ба хати рости c параллел аст ва аз он дар масофаи *1,2 м* меистад, гузаронида шудааст. Масофаро аз нуқтаи A то хати рости b ёбед.

151. Ҳамвории α ва хати рости a дода шудаанд. Исбот кунед, ки ҳамаи хатҳои росте, ки ба ҳамвории α

перпендикуляранд ва хати рости *а*-ро мебуранд, дар ҳамворӣ ба ҳамвории α перпендикуляр ҷойгиранд.

152. Аз нуқтаҳои *A* ва *B*, ки дар ду ҳамвории перпендикуляр ҷойгиранд, перпендикулярҳои *AC* ва *BD* ба хати рости буриши ин ҳамвориҳо фуроварда шудааст. Дарозии порчаи *AB*-ро ёбед, агар: 1) *AC =a, BD=b, CD=c; 2) AD=a, BC=b, CD=c* бошад.

153. Нуқта аз ду ҳамвории перпендикуляр мувофиқан дар масофаи *a* ва *b* ҷойгир аст. Масофаро аз ин нуқта то хати рости буриши ин ҳамвориҳо ёбед.

154. Ҳамвориҳои перпендикуляри α ва β аз рӯйи хати рости *c* бурида мешаванд. Дар ҳамвории α хати рости *a*, дар ҳамвории β хати рости *b*, ки ба хати рости *c* ҳар ду параллеланд, гузаронида шудаанд. Масофаи байни хатҳои рости *a* ва *b* -ро ёбед, агар масофаи байни хатҳои рости *a* ва *c* ба 1,5 *м* ва масофаи байни хатҳои рости *b* ва *c* ба 0,8*м* баробар бошад.

Масъалаҳо барои такрор

155. Аз қуллаи кунҷи рости *C*-и секунҷаи *ABC* ба ҳамвории секунҷа перпендикуляри *CD* гузаронида шудааст. Масофаро аз нуқтаи *D* то гипотенузаи секунҷа ёбед, агар *AB*=5 *см*, *BC*=4 *см* ва *CD*=6 *см* бошад.

156. Аз охирҳои порчаи *AB*, ки ба ҳамворӣ параллел аст, перпендикуляри *AC* ва моили *BD*-и ба порчаи *AB* перпендикуляр гузаронида шудааст. Масофаи байни нуқтаҳои *C* ва *D* ба чӣ баробар аст, агар *AB=a*, *AC=b* ва *BD=c* бошад?

157. Дар давраи радиусаш *R*=5 см трапетсия кашида шудааст, ки тарафи паҳлуӣ ва диагоналаш мувофиқан ба

6 *см* ва 9 *см* баробаранд. Масоҳати трапетсияро муайян кунед.

158. Бигузор α ва β кунҷҳои секунҷаи *ABC* мебошанд. Исбот кунед, ки агар $\sin 2\beta = \sin\alpha$ бошад, он гоҳ секунҷаи *ABC* баробарпаҳлу аст.

§4. КУНҶИ БАЙНИ ХАТҲОИ РОСТ ВА ҲАМВОРИҲО ДАР ФАЗО

12. Кунҷи байни ду хати рост дар фазо. Кунҷи байни хати рост ва ҳамворӣ

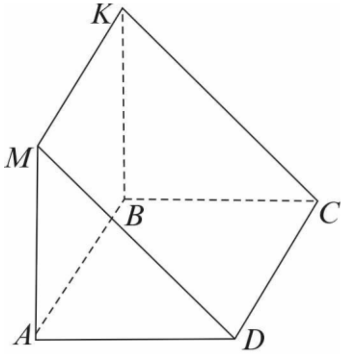
I. Ҳангоми ҳамдигарро буридани ду хати рост 4 кунҷ ҳосил мешавад. Дар айни ҳол кунҷҳои амудӣ бо ҳам баробаранд, кунҷҳои ҳамсоя ҳамдигарро то 180° пурра мекунанд.

Таърифи 1. *Кунҷи байни хатҳои рости ҳамдигарро буранда* гуфта, ченаки кунҷии кунҷи хурдтаринро, ки ҳангоми буриш ҳосил мешавад, меноманд.

Кунҷи байни хатҳои рости перпендикуляр мувофиқи таъриф 90° аст, кунҷи байни хатҳои рости параллел бошад, ба нул баробар ҳисоб карда мешавад.

Ҳамин тариқ, кунҷи байни ду хати рост, ки дар як ҳамворӣ ҷойгиранд, фигураи геометрӣ набуда, *ченак (андоза)* мебошад, яъне бузургиест, ки дар байни 0° ва 90° ҷойгир аст.

Барои дохил кардани мафҳуми кунҷи байни хатҳои рости чиликӣ ба мо теоремаи 26, ки дар поён оварда мешавад, лозим меояд. Исботи ин теорема ба леммаи зерин, ки ҳамчун лемма дар бораи се параллелограмм маъмул аст, такя мекунад.



Расми 75

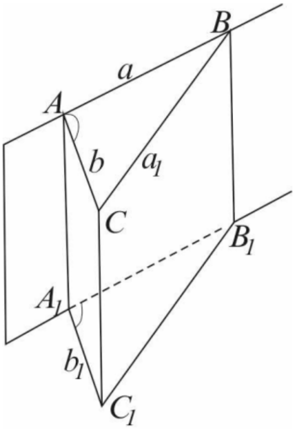
Лемма. *Агар* $ABCD$ *ва* $ABKM$ *параллелограммҳои дар як ҳамворӣ ҷойгирнабуда бошанд (расми 75), он гоҳ чоркунҷаи* $CDMK$ *ҳам параллелограмм мебошад.*

Исбот. Мувофиқи шарти лемма $MK=AB$ ва $CD=AB$ аст, бинобар ин $MK=CD$ аст. Инчунин, MK ва CD ба AB параллеланд, пас мувофиқи теоремаи 4 MK ба CD параллел мебошад. Ҳамин тариқ, дар чоркунҷаи $CDMK$ ду тарафи муқобил параллел ва баробаранд. Барои ҳамин ҳам вай параллелограмм мебошад.

Хотиррасон мекунем, ки бо исботи лемма мо масъалаи 76-ро (ниг.ба пункти 5) ҳал кардаем.

Теоремаи 25. *Агар ду хати рости ҳамдигарро буранда ба ду хати рости ҳамдигарро бурандаи дигар параллел бошанд, он гоҳ кунҷҳои байни онҳо бо ҳам баробаранд.*

Исбот. Фарз мекунем, ки хатҳои рости ҳамдигарро бурандаи a ва b мувофиқан ба хатҳои рости a_1 ва b_1, параллеланд. Ҳисоб мекунем, ки хатҳои рост дар ҳамвориҳои гуногун ҷойгиранд. Аз рӯйи нуқтаҳои буриши онҳо A ва A_1 хати рости AA_1-ро мегузаронем. Баъд, дар хати рости a нуқтаи B ва дар хати рости b

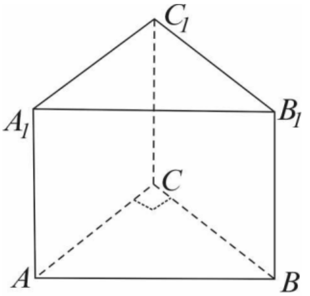


Расми 76

нуқтаи C-ро гирифта, аз рӯйи онҳо хатҳои рости ба хати рости AA_1 параллелро мегузаронем. Бигузор нуқтаҳои буриши ин хатҳои рост бо хатҳои рости a_1 ва b_1, нуқтаҳои B_1 ва C_1 бошанд (расми 76). Чоркунҷаҳои AA_1B_1B ва AA_1C_1C параллелограмманд. Нуқтаи B-ро бо нуқтаи C ва нуқтаи B_1-ро бо нуқтаи C_1 пайваст карда, чоркунҷаи дигари BCC_1B_1-ро ҳосил мекунем. Мувофиқи лемма вай параллелограмм мебошад. Пас, $BC=B_1C_1$ аст.

Секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$-ро дида мебароем. Аз баробарии тарафҳои муқобили параллелограммҳо бармеояд, ки $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$ ва $AB=A_1B_1$ аст. Аз ин ҷой, мувофиқи аломати сеюми баробарии секунҷаҳо $\Delta AAC=\Delta A_1B_1C_1$. Пас, $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$. Теорема исбот шуд.

Масъалаи 1. Тарафҳои секунҷаи ABC ба тарафҳои секунҷаи $A_1B_1C_1$ ҷуфт-ҷуфт параллеланд. Тарафҳои секунҷаи $A_1B_1C_1$ дода шудаанд: $A_1C_1=4\sqrt{2}$ *см*, $A_1B_1=\sqrt{137}$ *см*, $B_1C_1=7$ *см*. Кунҷи ACB-ро (кунҷи байни тарафҳои AC ва CB) меёбем (расми 77).



Расми 77

Ҳал. Кунҷи ACB мувофиқи теорема ба кунҷи $A_1C_1B_1$ баробар аст. Дар секунҷаи $A_1B_1C_1$ мувофиқи теоремаи косинусҳо дорем:

$$A_1B_1^2=A_1C_1^2+B_1C_1^2-2A_1C_1\cdot B_1C_1\cdot\cos C_1.$$

Қиматҳои мувофиқро гузошта, ҳосил мекунем:

$$\left(\sqrt{137}\right)^2=\left(4\cdot\sqrt{2}\right)^2+7^2-2\cdot4\sqrt{2}\cdot7\cdot\cos C_1 \text{ ё}$$

$$137 = 32 + 49\text{-}56\sqrt{2}\cos C_1.$$

Аз ин ҷой:

$$\cos C_1=\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ яъне } \angle C_1 = 45°.$$

II. Акнун мафҳуми кунҷи байни хатҳои рости чиликиро дохил мекунем.

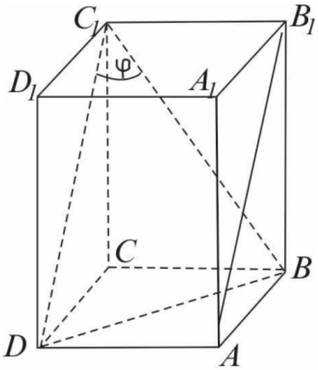
Таърифи 2. *Кунҷи байни хатҳои рости чиликӣ* гуфта, кунҷеро меноманд, ки он ба кунҷи байни хатҳои рости ҳамдигарро бурандаи ба хатҳои рости чиликӣ ҷуфт- ҷуфт параллел баробар аст.

Аз теоремаи 25 бармеояд, ки кунҷи (бузургӣ аст!) ҳамин тавр дохилкарда, ба он ки кадом хатҳои ҳамдигарро бурандаи ба хатҳои рости чиликӣ параллелбуда, гирифта шудаанд, вобаста нест. Аз ин теорема инчунин бармеояд, ки барои ёфтани кунҷи байни хатҳои рости чиликии a ва b, масалан, агар аз рӯйи ягон нуқтаи A-и хати рости a ба хати рости b хати рости b_1-ро параллел гузаронем, он гоҳ кунҷи байни хатҳои рости a ва b ба кунҷи байни хатҳои рости a ва b_1 баробар мешавад.

Пеш мо ду хати ростро перпендикуляр номида будем, агар онҳо дар зери кунҷи рост ҳамдигарро мебуриданд.

Айнан мисли ҳамин, *хатҳои рости чиликӣ перпендикуляр* номида мешаванд, агар кунҷи байни онҳо 90° бошад. Савол ба миён меояд, ки чаро кунҷи байни ду хати рост дар фазо на ҳамчун фигура, балки ҳамчун бузургӣ муайян карда мешавад. Гап дар сари он аст, ки ҳангоми дода шудани ду хати рост, масалан, хатҳои рости чиликӣ на ҳамеша ошкоро ба кунҷи байни онҳо ҳамчун фигураи геометрӣ ишора кардан мумкин аст.

Масъалаи 2. Куби $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ дода шудааст (расми 78). Кунҷи байни хатҳои рости AB_1 ва BC_1-ро меёбем.



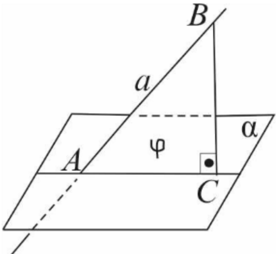
Расми 78

Ҳал. Ҳалли масъала ба гузаронидани хати рости параллел ба якеи ин хатҳои рост аз нуқтаи дигариаш асос карда мешавад. Аз нуқтаи C_1 диагонали C_1D-ро, ки ба хати рости AB_1 параллел аст, мегузаронем. Кунҷи матлуб ба кунҷи BC_1D баробар аст. Секунҷаи BC_1D-ро дида мебароем. Тарафҳои ин секунҷа диагонали рӯяҳои кубанд, яъне ин секунҷа баробартараф аст. Пас, $\varphi = \angle BC_1D = 60°$.

Дигар мафҳуми муҳимме ҳаст, ки бо ёрии мафҳуми перпендикуляр дохил карда мешавад. Ин мафҳуми *кунҷи байни хати рост ва ҳамворӣ* мебошад. Бигузор дар нуқтаи A хати рости a бо ҳамвории α бурида мешавад (расми 79). Дар хати рости a нуқтаи дилхоҳи B-ро гирифта, аз он ба ҳамвории α перпендикуляри BC

мегузаронем. Дар ҳамвории α хати рости AC-ро месозем. Ин хати рост *проексияи хати рости а дар ҳамвории* α номида мешавад.

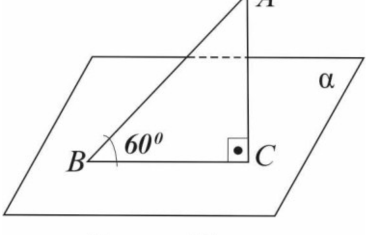
Таърифи 3. *Кунҷи байни хати рости а ва ҳамвории* α гуфта, кунҷи байни хати рости а ва проексияи онро дар ҳамвории α меноманд.



Расми 79

Дар расми 79 кунҷи байни хати рости a ва ҳамвории α аст. Агар хати рости a ҳамвориро бурад ва ба он перпендикуляр набошад, он гоҳ $0° < \varphi < 90°$ аст. Агар хати рости a ба ҳамвории α параллел бошад ё дар он ҷойгир бошад, он гоҳ кунҷи φ ба нул баробар ҳисоб карда мешавад. Кунҷи байни хати рост ва ҳамворӣ, ки бо ҳам перпен-дикуляранд, 90° мебошад.

Азбаски хати рости a, проексияи вай дар ҳамвории α ва перпендикуляр ба α дар нуқтаи A-и буриши он бо хати рости a, дар як ҳамворӣ ҷойгиранд, пас *кунҷи байни хати рост ва ҳамворӣ кунҷи байни ин хати рост ва перпендикулярро бо ҳамворӣ то 90° пурра мекунад.*



Расми 80

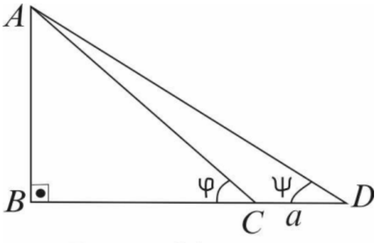
Масъалаи 3. Масофаи байни нуқтаи A ва ҳамворӣ ба 3 *см* баробар аст. Дарозии моилро, ки аз ин нуқта ба ҳамворӣ дар зери кунҷи 60° фуроварда шудааст, меёбем.

Ҳал. Ба ҳамворӣ аз нуқтаи A перпендикуляри AC мегузаронем (расми 80). Секунҷаи

ABC росткунҷа аст. Кунҷи росташ дар қуллаи *C* ҷойгир мебошад. Кунҷи тези ин секунҷа, ки дар муқобили катети *AC* воқеъ аст, ба 60° баробар мебошад. Бинобар ин AC:AB $= \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ мешавад. Аз ин ҷой ҳосил мекунем:

$$AB = \frac{2}{\sqrt{3}} AC = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 3 = 2\sqrt{3} \text{ см.}$$

Масъалаи 4. Порчаи *AB* ба ҳамворӣ перпендикуляр буда, аз нуқтаҳои *C* ва *D*-и ҳамворӣ мувофиқан нӯги *A*-и он дар зери кунҷҳои φ ва ψ дида мешавад. Маълум, ки масофаи нуқтаҳои *C* ва *D* ба *a* баробар аст. Дарозии порчаи *AB*-ро меёбем.



Расми 81

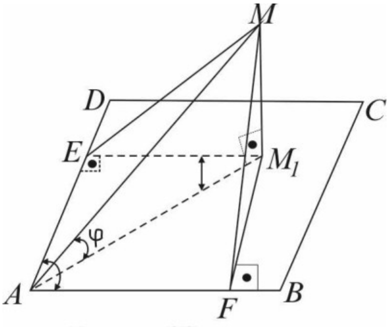
Ҳал. Усули ба масъалаи планиметрӣ овардани масъалаи стереометриро татбиқ мекунем (ниг. ба пункти 5). Аз рӯйи хати рости *CD* ва нуқтаи *A* ҳамворӣ гузаронида, дар он масъаларо ҳал мекунем (расми 81). Ба секунҷаи *ACD* теоремаи синусҳоро татбиқ карда, ҳосил мекунем:

$$\frac{AC}{\sin\psi} = \frac{CD}{\sin\angle CAD}.$$

Вале *CD*=*a* ва $\angle CAD$=180°- (180°-φ)-ψ = φ-ψ. Пас, $AC = \frac{a \cdot \sin\psi}{\sin(\varphi - \psi)}$. Аз секунҷаи росткунҷаи *ABC* дорем: $AB = \frac{a \cdot \sin\varphi \sin\psi}{\sin(\varphi - \psi)}$.

Эзоҳ. Дар амалия ҳалли ин масъала барои ёфтани дарозии предметҳое, ки бевосита чен кардани онҳо имконнопазир аст, васеъ истифода карда мешавад. Масалан, барои чен кардани баландии хонаҳо ё қуллаҳо. Барои ин тавре дидем, кифоя аст, аз ду нуқтаи масофаашон муайян нуқтаи баландтарини предметро назорат карда, кунҷҳои заруриро донем.

Масъалаи 5. Аз рӯйи қуллаи A-и росткунҷаи $ABCD$ ва нуқтаи M-и дар ҳамвории росткунҷа ҷойгирнабуда хати рости AM гузаронида шудааст. Маълум аст, ки ин хати рост бо тарафҳои AD ва AB-и росткунҷа кунҷи 60°-ро ташкил медиҳад. Кунҷи байни моили AM ва ҳамвории росткунҷаро меёбем.



Расми 82

Ҳал. Перпендикуляри MM_1-ро мегузаронем. Нишон медиҳем, ки нуқтаи M_1 дар биссектрисаи кунҷи A ҷойгир аст. Дар ҳақиқат, агар аз нуқтаи M_1 ба тарафҳои AD ва AB перпендикулярҳои M_1E ва M_1F-ро гузаронем (расми 82), он гоҳ мувофиқи теорема дар бораи се перпендикуляр (ниг. ба пункти 10) кунҷҳои AEM_1 ва AFM_1 кунҷҳои рост мебошанд.

Мувофиқи шарти масъала $\angle MAD = \angle MAB = 60°$. Пас секунҷаҳои росткунҷаи AEM ва AFM дорои ду кунҷи баробар мебошанд, яъне онҳо монананд. Аз сабаби умумӣ будани гипотенузаи AM, онҳо ба ҳамдигар баробаранд. Яъне $ME = MF$. Порчаҳои M_1E ва M_1F проексияи моилҳои ME ва MF дар ҳамвории росткунҷа мебошанд. Баробарии моилҳо ба баробарии проексияҳо баробарқувва аст. Пас, $EM_1 = M_1F$. Аз ин ҷой ва аз рост будани кунҷҳои M_1EA ва M_1FA бармеояд, ки AFM_1E квадрат аст, пас AM_1 биссектрисаи кунҷи DAB мебошад, яъне $\angle AM_1E=\angle AM_1F = 45°$. Кунҷи матлуб $\varphi = \angle MAM_1$ аст. Бигзор $AM = a$ бошад. Аз секунҷаи AME дорем:

$$AE = AM\cdot\cos\angle MAD = AM\cos 60° = \frac{a}{2}.$$

Аз секунҷаи AEM_1 меёбем:

$$AE = AM_1 cos\angle AM_1E = AM_1\cdot cos\ 45° = AM_1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Аз ин ҷой:

$$AM_1= \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot AE=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Акнун аз секунҷаи AM_1M доро мешавем:

$$\cos\varphi = \frac{AM_1}{AM}=\frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ҳамин тариқ, $\varphi = \angle MAM_1 = 45°$.

Саволу супоришҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Кунҷи байни хатҳои рости ҳамдигарро буранда дар фазо чӣ тавр муайян карда мешавад? Кунҷи байни хатҳои рости чиликӣ – чӣ?

2. Барои чӣ кунҷи байни хатҳои рости чиликӣ ба интихоби хатҳои рости ба онҳо параллел вобаста нест?

3. Барои чӣ кунҷи байни хатҳои рост дар фазо танҳо бузургӣ буда, фигураи геометрӣ нест?

4. Дар кадом ҳолат хатҳои рости чиликӣ бо ҳам перпендикуляр номида мешаванд?

5. Кунҷи байни хати рост ва ҳамворӣ чӣ тавр муайян карда мешавад?

6. Кунҷи байни моил ва ҳамвориро чӣ тавр муайян кардан мумкин аст?

7. Кунҷи байни хати рост ва ҳамворӣ, кунҷи байни ин хати рост ва перпендикулярро бо ҳамворӣ то чанд градус пурра мекунад?

Масъалаҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

159. Хати рости *a* ба ҳамвории α перпендикуляр аст. Исбот кунед, ки вай ба ҳар гуна хати рости *b*, ки дар ҳамворӣ ҷойгир аст, перпендикуляр мебошад.

160. Бигузор $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб аст. Кунҷи байни хатҳои рости: 1) AB_1 ва CC_1; 2) AB_1 ва CD_1: 3) AB_1 ва DA_1 - ро ёбед.

161. Нуқтаи *A* аз ҳамворӣ дар масофаи *h* ҷойгир аст. Дарозии моилҳоеро, ки ба ҳамворӣ дар зери кунҷҳои:

1) 30°; 2) 45°; 3) 60° гузаронида шуданд, ёбед.

162. Аз нуқтае, ки аз ҳамворӣ дар масофаи *a* ҷойгир аст, ду моили бо ҳамворӣ кунҷҳои 45° ва 30° ташкилкунанда гузаронида шудааст. Дар навбати худ ин моилҳо байни худ перпендикуляр мебошанд. Масофаи байни охирҳои моилҳоро ёбед.

163. Дарозии моил *a* аст. Проексияи ин моил ба ҳамворӣ ба чӣ баробар аст, агар кунҷи байни моил ва ҳамворӣ ба: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° баробар бошад?

164. Охирҳои порчаи дарозиаш 10 *м* аз ҳамворӣ дар масофаи 2 *м* ва 3 *м* ҷойгиранд. Порча ҳамвориро мебурад. Кунҷи байни порча ва ҳамвориро ёбед.

165. Тарафи AB-и квадрати $ABCD$ дар ҳамвории α ҷойгир аст. Тарафи BC бо ҳамворӣ кунҷи 60°-ро ташкил медиҳад. Кунҷи байни хати рости AC ва ҳамвории α-ро ёбед.

166. Тарафи AB-и секунҷаи мунтазам дар ҳамвории α ҷойгир аст. Тарафҳои AC ва BC ба ҳамворӣ дар зери кунҷи 45° моиланд. Кунҷҳои байни медианаҳои секунҷаи ABC ва ҳамвории α-ро ёбед.

167. Аз нуқтаи аз ҳамворӣ дар масофаи a ҷойгирбуда ду моил ба ҳамворӣ гузаронида шудааст, ки онҳо бо ҳамворӣ кунҷҳои 45°-ро ташкил мекунанд. Кунҷи байни моилҳо 60° аст. Масофаи байни нуқтаҳои охири моилҳоро ёбед.

168. Аз нуқтаи аз ҳамворӣ дар масофаи a ҷойгирбуда ба ҳамворӣ дар зери кунҷи 30° ду моил гузаронида шудааст. Дар айни ҳол проексияи ин моилҳо кунҷи 120°-ро ташкил медиҳад. Масофаи байни нуқтаҳои охири моилҳоро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

169. Аз нуқта ба ҳамворӣ ду моил гузаронида шудааст, ки дарозиашон 17 *см* ва 15 *см* аст. Проектсияи якеи онҳо аз проексияи дигараш 4 *см* зиёд аст. Проексияи моилҳоро ёбед.

170. Исбот кунед, ки суммаи квадратҳои диагоналҳои параллелограмм ба суммаи квадратҳои тарафҳои он баробар аст.

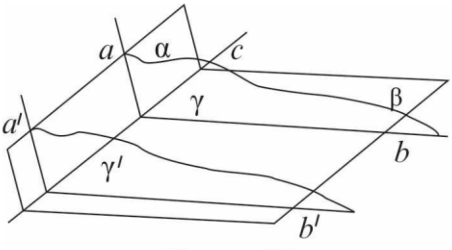
171. Медианаҳои секунҷаи *ABC* дода шудаанд. Тарафҳои он ёфта шавад.

13. Кунҷи байни ду ҳамворӣ.

Масоҳати проексияи перпендикулярии бисёркунҷа

I. Мафҳуми нав - *кунҷи байни ду ҳамвориро* дохил мекунем. Агар ин ҳамвориҳо параллел бошанд, ин кунҷ ба нул баробар ҳисоб карда мешавад.

Бигузор ҳамвориҳои α ва β аз рӯйи хати рости c бурида мешаванд.



Расми 83

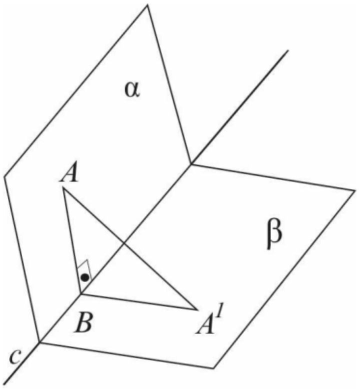
Таърифи 1. *Кунҷи байни ду ҳамвории ҳамдигарро бурандаи* α *ва* β гуфта, кунҷи байни хатҳои рости a ва b-ро, ки ҳангоми бо ҳамвории дилхоҳи γ бурида шудани α ва β ҳосил мешавад, меноманд. Дар айни ҳол пиндошта мешавад, ки ҳамвории γ ба хати рости c, ки аз рӯйи он ҳамвориҳои α ва β бурида мешаванд, перпендикуляр мебошад (расми 83).

Нишон медиҳем, ки кунҷи ин тавр муайяншуда ба интихоби ҳамвории бурандаи γ вобаста нест. Дар ҳақиқат, бигузор φ_γ ва $\varphi_{\gamma'}$ кунҷҳоеанд, ки ҳангоми интихоби ҳамвориҳои бурандаи γ ва γ' ҳосил мешаванд. Азбаски ҳамвориҳои γ ва γ' ба хати рости c перпендикуляранд, пас онҳо бо ҳам параллел мебошанд (ниг. ба пункти 9, ба теоремаҳо дар бораи ду перпендикуляр). Барои ҳамин хатҳои рости буриши онҳо бо ҳамвориҳои α ва β хатҳоеанд, ки бо ҳамдигар параллел мебошанд. Пас, мувофиқи теоремаи 25 $\varphi_\gamma = \varphi_{\gamma'}$ мешавад.

Инак, бо дода шудани ду ҳамвории ҳамдигарро буранда кунҷи байни онҳо яққимата муайян карда мешавад.

Барои сохтани кунҷи байни ҳамвориҳои α ва β ин тавр амал мекунанд:

1) нуқтаи C-ро аз хати рости буриши ин ҳамвориҳо c гирифта, аз рӯйи нуқтаи C дар ин ҳамвориҳо хатҳои рости a ва b-ро, ки бо хати рости c перпендикуляранд, мегузаронанд. Кунҷи байни хатҳои рости a ва b ба кунҷи байни ҳамвориҳои α ва β баробар аст, чунки аз рӯйи аломати перпендикулярии хатҳои рост ва ҳамворӣ (аз рӯйи теоремаи 14) ҳамвории аз рӯйи хатҳои рости a ва b гузаранда ба хати рости c перпендикуляр аст;



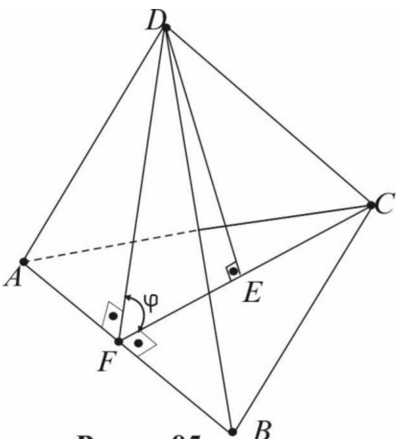
Расми 84

2) созиши бисёр вомехӯрдаи зеринро истифода мекунанд: нуқтаи A-ро аз ҳамвории α, ки ба хати рости c тааллуқ надорад, мегиранд ва аз он ба хати рости c перпендикуляри AB, баъд ба ҳамвории дуюми β перпендикуляри AA^1-ро мегузаронанд (расми 84). Дар ин вақт кунҷи ABA^1 кунҷи байни ҳамвориҳои α ва β мешавад. Дар ҳақиқат, мувофиқи созиш AB ба c перпендикуляр аст. Аз рӯйи теорема дар бораи се

перпендикуляр (теоремаи 20) A^1B низ ба c перпендикуляр мебошад. Барои ҳамин ба хатҳои рости BA ва BA^1 мулоҳизаронихҳои дар созиши 1) овардаро татбиқ кардан мумкин аст.

Хотирнишон мекунем, ки айнан мисли ҳолати хатҳои рост, кунҷи байни ду ҳамворӣ ин ченаки кунҷии дар байни 0° ва 90° маҳдудбуда аст, на фигураи геометрӣ.

Масъалаи 1. Секунҷаи баробартарафи ABC, ки тарафаш 8 *см* аст, дода шудааст. Аз нуқтаи D-и берун аз ҳамвории секунҷа ба маркази секунҷа E перпендикуляр фуроварда шудааст, ки дарозиаш 4 *см* аст. Кунҷи байни ҳамвориҳои секунҷаҳои ABC ва ABD-ро меёбем.



Расми 85

Ҳал. Кунҷи байни ин ҳамвориҳоро, мисли созиши 1) амал карда, месозем (расми 85). Маркази секунҷа аз сабаби баробартараф буданаш дар баландии CF ҷойгир аст. Нуқтаи D-ро бо нуқтаҳои A,B ва F пайваст мекунем. Аз рӯйи теорема дар бораи се перпендикуляр (теоремаи 20) DF ба AB перпендикуляр мешавад. Ҳамин тариқ, кунҷи байни ҳамвориҳои секунҷаҳои ABC ва ABD кунҷи DFC аст. Бузургии ин кунҷро меёбем. Аз секунҷаи ACF дорем:

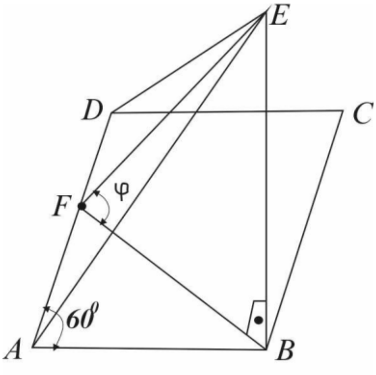
$$\mathrm{CF}=\mathrm{AC}\cdot\ \sin\angle\mathrm{A}=\mathrm{AC}\cdot\sin60°=\frac{8\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\,см\,.$$

Мувофиқи хосияти медиана $EF = \frac{1}{3}CF = \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}\,см$ мешавад. Агар $\varphi=\angle DFE$ гузорем, он гоҳ ҳосил мекунем:

$$tg\varphi = \frac{DE}{EF} = \frac{4}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}; \quad \varphi = \mathrm{arctg}\sqrt{3}; \quad \varphi = 60^0.$$

Ҷавоб: 60°.

Масъалаи 2. Тарафи ромби *ABCD* 6 *см* ва кунҷи *A*-и он 60° аст. Аз нуқтаи *E*-и берун аз ҳамвории секунҷаи *ABC* перпендикуляри *BE*, ки дарозиаш $3\sqrt{3}$ см аст, гузаронида шудааст. Кунҷи байни ҳамвориҳои секунҷаҳои *ABC* ва *AED*-ро меёбем.



Расми 86

Ҳал. Дар аввал кунҷи байни ин ҳамвориҳоро сохтан лозим аст. Аз қуллаи *B* ба тарафи *AD* перпендикуляри *BF*-ро мегузаронем (расми 86). Хати *EF*-ро гузаронида мебинем, ки вай мувофиқи теорема дар бораи се перпендикуляр ба тарафи *AD* перпендикуляр мешавад. Кунҷи *EFB* кунҷи матлуб мебошад. Аз секунҷаи *AFB* дорем:

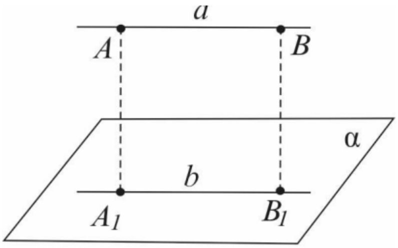
$$BF = AB\sin \cdot 60^0 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\,см.$$

Мувофиқи шарти масъала $EB=3\sqrt{3}$ *см* аст, пас *EB=BF* мебошад, яъне секунҷаи *EFB* секунҷаи баробарпаҳлуи росткунҷа аст. Аз ин ҷой: $\varphi=\angle EFB=45°$.

II. Дар ин қисм боз якчанд мафҳуми дигарро дохил мекунем. Дар пункти 9 мо чунин мафҳумҳо, ба монанди *моил, асоси моил ва проексияи (ортогоналии) моилро* дар ҳамворӣ дохил карда будем. Дар айни замон муҳим аст, ки моил (порчаи хати рост) ҳамвориро дар зери ягон кунҷе бурад.

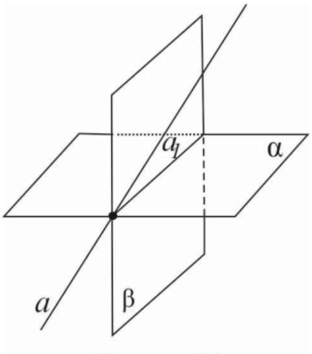
Фарз мекунем, ки нуқтаи берун аз ҳамворӣ дода шудааст. Асоси перпендикуляре, ки аз ин нуқта ба ҳамворӣ гузаронида шудааст, *проексияи перпендикулярӣ ё ортогоналии нуқта* дар ҳамворӣ ё кӯтоҳ *проексияи нуқта* ном дорад. Агар нуқта дар ҳамворӣ ҷойгир бошад, он гоҳ проексияаш худаш аст.

Бигузор хати рости *a* ва ҳамвории α дода шудаанд ва хати рост ба ҳамворӣ перпендикуляр нест. Ҳар як нуқтаи чунин хати ростро дар ҳамворӣ проексия карда, хати ростро ҳосил мекунем, ки онро *проексияи перпендикулярии (проексияи) хати рости a* дар ҳамвории α меноманд.



Расми 87

Дурустии ин тасдиқро нишон медиҳем. Яъне нишон медиҳем, ки проексияи хати рост дар ҳамворӣ хати рост аст. Ду ҳолатро дида мебароем: а) хати рост ба ҳамворӣ параллел аст (расми 87). Ду нуқтаи дилхоҳи он *A* ва *B*-ро ба ҳамвории α проектсия карда (аз онҳо перпендикуляр фуроварда), аз рӯйи проексияи онҳо (нуқтаҳои A_1 ва B_1) дар ҳамворӣ хати рости *b*-ро мегузаронем. Проексияи ҳар гуна нуқтаи *a* дар α дар хати рости *b* ҷойгир аст, чунки масофаи байни нуқта ва проексияаш ба масофаи байни хати рост ва ҳамворӣ баробар аст, яъне ба бузургии доимӣ. Дар ин ҳолат хати рост ба проексияаш параллел мебошад.



Расми 88

б) хати рост ҳамвориро мебурад (расми 88).

Ҳамаи перпендикулярҳои аз хати рости a ба ҳамвории α гузаронидашуда байни худ параллеланд (теоремаи 18). Бигузор β ҳамвориест, ки аз рӯйи ин хат ва яке аз ин перпендикулярҳо гузаронида шудааст.

Ҳамаи перпендикулярҳо, ки аз хати рост ба ҳамворӣ гузаронида шудаанд, дар ҳамвории β ҷойгиранд.

Барои ҳамин асоси ин перпендикулярҳо дар буриши ҳамвориҳо ҷойгир аст. Ин буриш бошад, хати рост аст. Тасдиқ исбот шуд.

Эзоҳи 1. Агар хати рост ба ҳамворӣ перпендикуляр бошад, он гоҳ проексияаш дар ҳамворӣ аз нуқта иборат аст (нуқтаи буриши хат бо ҳамворӣ).

Эзоҳи 2. Амалан мафҳуми проексияи хати рост дар ҳамвориро дар қисми III-и пункти 12 дохил карда будем. Дар ин ҷо бо мақсади асоснок кардани мафҳуми проексияи фигураи геометрӣ (таърифи 2) онро васеътар муоина кардем.

Бигузор фигураи геометрӣ ва ҳамворӣ дода шудаанд.

Таърифи 2. *Проексияи перпендикулярии (ортогоналии)* фигура дар ҳамворӣ гуфта, фигураеро меноманд, ки ҳар як нуқтаи он проексияи ягон нуқтаи фигураи додашуда мебошад.

Баъзан проексияи фигура аз худи фигура фарқ мекунад. Масалан, проексияи давра метавонад порча бошад. Вале аз мулоҳизаронихои боло бармеояд, ки проексияи порча ҳамеша порча аст. Бар замми ин нишон додан мумкин аст, ки порчаҳои баробар дорои проексияҳои баробаранд, проексияи хатҳои рости параллели ба ҳамворӣ перпендикулярнабуда параллеланд ва ғайра.

Далели муҳиммаш он аст, ки проексияи бисёркунҷа дар ҳамворӣ *ҳатман* бисёркунҷа аст, агар бисёркунҷа дар ҳамвории ба ҳамвории аввала перпендикуляр ҷойгир набошад (вагарна проексияаш порча мебошад).

Теоремаи 26. *Масоҳати проексияи перпендикулярии бисёркунҷа дар ҳамворӣ ба ҳосили зарби масоҳати он ба косинуси кунҷи байни ҳамвории бисёркунҷа ва ҳамвории проексия баробар аст.*

Исбот. Исботро танҳо дар ҳолати секунҷа будани бисёркунҷа меорем ва онро ҳам дар ҳолати хусусӣ. Фарз мекунем, ки секунҷаи ABC ва ҳамвории α дода шудаанд. Се ҳолати имконпазир мавҷуд аст:

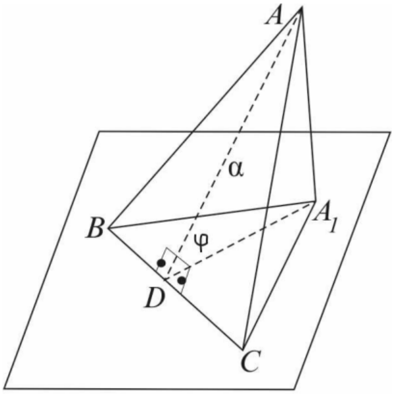
1) яке аз тарафҳои секунҷаи ABC дар ҳамвории α ҷойгир аст;

2) яке аз тарафҳои секунҷаи ABC ба ҳамвории α параллел аст;

3) секунҷаи ABC дар ҳамвории α ҷойгир набуда, ягон тарафи он ба ҳамвории α параллел нест.

Ҳолати 1)-ро дида мебароем. Фарз мекунем, ки тарафи BC-и секунҷаи ABC дар ҳамвории α ҷойгир аст (расми

89). Проексияи секунҷаи ABC дар ҳамвории аз рӯйи тарафи BC гузарандаи ҳамвории α, секунҷаи A_1BC аст, ки



Расми 89

нуқтаи A_1 асоси перпендикуляри аз нуқтаи A фуровардашуда мебошад.

Аз A ба тарафи BC перпендикуляри AD мегузаронем. Мувофиқи теорема дар бораи се перпендикуляр (теоремаи 20) A_1D ба BC перпендикуляр аст. Барои ҳамин $\varphi=\angle ADA_1$ кунҷи байни ҳамвории секунҷаи ABC ва ҳамвории α аст. Дорем: $S_{\Delta A_1BC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot A_1D.$ Аз секунҷаи AA_1D: $cos\varphi=\frac{A_1D}{AD}$.

Яъне, $A_1D=AD\cdot\cos\varphi$ ва $S_{\Delta A_1BC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD\cdot\cos\varphi.$ Вале

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD,\text{ пас } S_{\Delta A_1BC}=S_{\Delta ABC}\cdot\cos\varphi.$$

Инак, теорема дар ҳолати хусусие, ки мо дида баромадаем, дуруст аст. Ба ин монанд, теоремаро дар ҳолатҳои 2) ва 3) ҳам исбот кардан мумкин мебошад.

Дар ҳолати умумӣ, масоҳати проексияи бисёркунҷаро дар ҳамворӣ бо тарзи ба секунҷаҳо ҷудо кардани ин бисёркунҷа ва бо роҳи ёфтани суммаи масоҳатҳои проексияҳои ҳар як секунҷа дар ин ҳамворӣ бо осонӣ ҳисоб кардан мумкин аст. Бо ҳамин мулоҳиза теоремаро исботшуда мешуморем.

Ду масъалаи нисбатан содаро, ки ҳаллашон бо истифодаи теорема ҳосил мешавад, дида мебароем.

Масъалаи 1. Масоҳати секунҷаи ABC 30 $см^2$ аст. Тарафҳои проексияи ин секунҷа дар ҳамворӣ, ки секунҷаи A_1BC аст, мувофиқан ба 6 *см*, 10 *см* ва 14 *см* баробар мебошанд. Кунҷи байни ҳамвориҳои ин секунҷаҳоро меёбем.

Ҳал. Агар кунҷи байни ҳамвориҳои секунҷаҳои ABC ва A_1BC φ бошад (ниг. ба расми 89), он гоҳ мувофиқи теорема $S_{\Delta A_1BC} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos\varphi$. Барои ёфтани φ бояд $S_{\Delta A_1BC}$-ро донем.

Ҳар се тарафи секунҷаи A_1BC дода шудааст, барои ҳамин формулаи Геронро истифода мекунем:

$$p = \frac{6+10+14}{2} = 15см,$$

$$S_{\Delta A_1BC} = \sqrt{15(15-6)(15-10)(15-14)} = 15\sqrt{3}\ см^2.$$

Пас, $\cos\varphi = \dfrac{S_{\Delta A_1BC}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{15\sqrt{3}}{30} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Аз ин ҷой: φ=30°.

Масъалаи 2. Ҳамвориҳои α ва β дода шудаанд. Секунҷаи баробартарафи ABC дар ҳамвории α ҷойгир буда, тарафаш 2 см аст. Кунҷи байни ҳамвориҳо ба 60° баробар мебошад. Масоҳати проексияи секунҷаи ABC-ро дар ҳамвории β меёбем.

Ҳал. Агар проексияи ABC дар ҳамвори β секунҷаи $A_1B_1C_1$ бошад, он гоҳ аз рӯйи теорема

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos 60^o = \frac{S_{\Delta ABC}}{2}.$$

Секунҷаи ABC баробартараф аст, бинобар ин

$$S_{\Delta ABC} = \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}см^2. \text{Пас } S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}см^2.$$

Қайд мекунем, ки теоремаи 26-ро асосан барои ҳисоб кардани масоҳати буришҳои гуногун, ки ҳангоми бо ҳамворӣ буридани ҷисмҳои геометрӣ ҳосил мешаванд, васеъ истифода мебаранд. Дар оянда дар рафти давом додани омӯзиши стереометрия (дар синфи 11-ум) инро мушоҳида хоҳем кард.

Саволу супоришҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Кунҷи байни ду ҳамворӣ чӣ тавр муайян карда мешавад? Барои чӣ бо таърифи 1 ин кунҷ яккимата муайян карда мешавад?

2. Кунҷи байни ду ҳамвории ҳамдигарро буранда чӣ тавр сохта мешавад? Ҳар ду тарзи созиши ин кунҷро баён кунед.

3. Масоҳати бисёркунҷа ва масоҳати проексияи перпендикулярии он дар ягон ҳамворӣ чӣ гуна алоқамандӣ доранд?

4. Проексияи фигура аз худи фигура фарқ карда метавонад? Мисолҳо оред.

Масъалаҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

172. Ду секунҷаи баробарпаҳлу асоси умумӣ доранд. Ҳамвориҳои онҳо байни худ кунҷи 60° ташкил медиҳанд. Асоси умумӣ ба 16 *м*, тарафи паҳлуии яке аз секунҷаҳо ба 17 *м* баробар аст. Тарафҳои паҳлуии секунҷаи дигар перпендикуляранд. Масофаи байни қуллаҳои секунҷаҳо ёфта шавад.

173. Ду ҳамворӣ ҳамдигарро дар зери кунҷи 30° мебуранд. Нуқтаи *A*, ки дар якеи ин ҳамвориҳо ҷойгир аст, аз ҳамвории дигар дар масофаи *a* меистад. Масофаро аз ин нуқта то хати рости буриши ҳамвориҳо ёбед.

174. Секунҷаҳои баробарпаҳлуи *ABC* ва *ABD* бо асоси умумии *AB* дар ҳамвориҳои гуногун, ки кунҷи байнашон ба φ баробар аст, ҷойгиранд. Кунҷи φ-ро ёбед, агар *AB*=24 *м*, *AC*= 65 *м*, *AD*=20 *м* ва *CD*=63 *м* бошад.

175. Кунҷи байни ҳамвориҳоро ёбед, агар нуқтаи дар яке аз онҳо гирифташуда аз хати рости буриши онҳо дар масофаи аз ҳамвории дигар 2 маротиба зиёд ҷойгир бошад.

176. Катетҳои секунҷаи росткунҷа 7 *м* ва 24 *м* мебошанд. Масофаро аз қуллаи кунҷи рост то ҳамворие, ки аз рӯйи гипотенуза гузашта, бо ҳамвории секунҷа 30°-ро ташкил мекунад, ёбед.

177. Исбот кунед, ки дар пирамидаи мунтазам: 1) теғаҳои паҳлуӣ; 2) рӯяҳои паҳлуӣ ба ҳамвории асос якхел моиланд.

178. Дар пирамидаи чоркунҷаи мунтазам кунҷи байни рӯяҳои паҳлуӣ ва ҳамвории асос ба φ баробар аст. Кунҷи байни теғаҳои паҳлуӣ ва ҳамвории асос ёфта шавад.

179. Дар пирамидаи секунҷаи мунтазам кунҷи байни теғаҳои паҳлуӣ ва ҳамвории асос ба φ баробар аст. Кунҷи байни рӯяҳои паҳлуӣ ва ҳамвории асосро ёбед.

180. Исбот кунед, ки дар куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ҳамвориҳои ACC_1A_1 ва A_1BD бо ҳам перпендикуляранд.

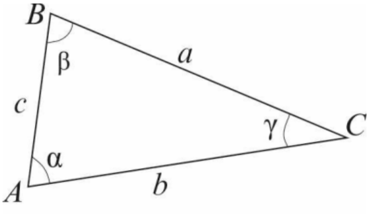
181. Исбот кунед, ки диагонали AC_1-и куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бо ҳамвориҳои A_1BD ва CB_1D_1 перпендикуляр мебошад.

182. Аз рӯйи тарафи *AB*-и секунҷаи *ABC* ҳамвории α гузаронида шудааст, ки бо ҳамвории секунҷа кунҷи 60°-ро ташкил мекунад. Масоҳати проексияи перпендикулярии секунҷаи *ABC*-ро ба ин ҳамворӣ ёбед, агар $AB = 5$ *м* ва дарозии баландии аз нуқтаи *C* фуровардашуда ба 2 *м* баробар бошад.

Масъалаҳо барои такрор

183. Аз нуқта ба ҳамворӣ ду моил гузаронида шудааст, ки якеи онҳо аз дигараш 6*см* дарозтар аст. Проектсияи моилҳо ба *17см* ва *7см* баробаранд. Дарозии моилҳоро ёбед.

184. Моил бо ҳамворӣ кунҷи 45°-ро ташкил мекунад. Аз рӯйи асоси моил дар ҳамворӣ дар зери кунҷи 45^0 ба проектсияи моил хати рост гузаронида шудааст. Кунҷи байни ин хати рост ва моилро ёбед.



Расми 90

185. Исбот кунед, ки агар дар секунҷаи *ABC* (расми 90) баробариҳои $a^3+b^3=c^2(a+b)$, $\cos(\alpha\text{-}\beta) - \cos(\pi\text{-}\gamma) = \frac{3}{2}$ дуруст бошанд, он гоҳ ин секунҷа баробартараф аст.

Маълумоти мухтасари таърихӣ дар бораи параллелӣ ва перпендикулярӣ

Асосгузори илмии фанни геометрия олими Юнони қадим Уқлидус (Эвклид) (365-300 пеш аз милод) ба ҳисоб меравад. Вай дар асари худ «Ибтидо», ки аз 13 китоб иборат аст, мафҳумҳо (фигураҳо) ва муносибатҳои ибтидоӣ ва нисбат ба онҳо аксиомаҳоро дар ҳамворӣ ва дар фазо пешниҳод карда, аз рӯйи онҳо назарияи илман ҷиддии геометрияро офаридааст. «Ибтидо» муддати дароз ҳамчун китоби дарсии курси (фанни) геометрияи мактабӣ истифода карда мешуд.

Се китоби охирини «Ибтидо» асосан маводди стереометриро дар бар мегирад. Алалхусус, дар китоби 11-ум асосҳои умумии стереометрия, масъалаҳои ҷойгиршавии хатҳои рост ва ҳамвориҳо, аз он ҷумла, параллелӣ ва перпендикулярии онҳо, инчунин таълимот дар бораи призма ва параллелепипед оварда шудааст. Мо қисми зиёди ин маводро дар китоби мазкур овардем.

Дар аввал геометрияи Уқлидус қавӣ ҳисоб мешуд. Вале оҳиста-оҳиста баъзе мафҳумҳо, таърифҳо ва аксиомаю постулатҳои (постулат - қоидае, ки ҳамчун ҳақиқат қабул мешавад) дохилкардаи ӯ, хусусан постулати 5-ум, зери шубҳа гузошта шуданд. Постулати 5-ум тасдиқ мекунад, ки агар ду хати рост бо хати рости сеюм бурида шавад, он гоҳ ин ду хати рост ҳамдигарро аз ҳамон тараф мебуранд, ки ҳосили ҷамъи кунҷҳои дохила аз 180^0 хурд аст. Исботталаб будани ин тасдиқ ҳанӯз дар Юнони қадим дарк шуда буд. Масалан, дар асри I пеш аз милод математики румӣ Посидоний (135-51 пеш аз милод) ба ҷойи ин постулат фарзияи мавҷудияти хатҳои рости дар як масофа ҷойгирбударо пешниҳод карда, постулатро исбот карда буд.

Асрҳои VIII–IX давраест, ки маркази рушди математика аз Аврупо, Ҳиндустон ва Хитой ба мамлакатҳои Шарқи наздик ва Миёна мекӯчад. Дар ин давра асарҳои математикҳои Бобулистону Юнон, Ҳиндустону Хитой ба забони арабӣ тарҷума шуда, дастраси умум мегарданд ва дар асоси онҳо тадқиқоти илмӣ ривоҷ меёбад. Ҳамаи кашфиёти геометрии олимони ин мамлакатҳоро номбар накарда, танҳо саҳми онҳоро дар назарияи хатҳои рост ва дар кӯшиши исботи постулати 5-ум махсус қайд мекунем (Бояд гуфт, ки то охири асри XIX масъалаи исботи ин постулат диққати ҳамаи математикҳои бузурги дунёро ҷалб кардааст.).

Дар асри IX исботи постулат аз тарафи олимони араб Ҷавҳарӣ, Ибни Қорро ва Найрезӣ диққатҷалбкунанда мебошад. «Донишнома»-и Абуалӣ ибни Сино (980–1037) дорои ду боби риёзӣ аст, ки якеи он ба геометрия бахшида шудааст. Ин боб баёни «Ибтидо»-и *Уқлидусро* бо исботҳо, ки қисми зиёди онҳо бо исботҳои Уқлидус якхела нестанд, дар бар мегирад. Ибни Сино постулати 5-умро исбот кард, ки он ба фарзияи мавҷудияти хатҳои рости дар масофаи баробар ҷойгиршуда (ин фарзия бо постулати исботшаванда баробарқувва аст) асос карда шудааст. Ҳасан Ибни Ҳайсам (956–1039) аз ш. Басраи Ироқ барои исбот аз аксиомаи Архимед (мавҷудияти порчае, ки ба порчаи додашуда то андозаи дилхоҳ каратӣ аст) истифода кардааст. Нодурустии исботи Хайсам дар он аст, ки аксиомаи Архимед хулосаи постулат мебошад ва баръакс. Исботи Умари Хайём (1048–1131) ба фарзияи он ки агар ду хати рост ба ҳамдигар наздик шаванд, он гоҳ онҳо ҳатман ҳамдигарро мебуранд, такя мекунад. Ин фарзия ҳам ба постулат баробарқувва мебошад.

Бузургтарин риёзидон (математик)-и асри XIII-и дунё Насируддини Тӯсӣ (1201–1272) дар асарҳояш «Таҳрири Уқлидус» (иборат аз 28 китоб), «Усули ҳандаса» ва

«Шакл-ул-қитъа» назарияи параллелии хатҳои ростро аз рӯйи истифодаи натиҷаҳои Ҷавҳарӣ ва Хайём инкишоф дода, ду тарзи исботи постулати 5-умро пешниҳод кардааст. Тӯсӣ дар яке аз ин исботҳо аз далели ҳамдигарро буридани перпендикуляр ва моил, ки аз як нуқта ба хати рост гузаронида шудаанд, дар дигараш, аз он ки аз нуқтаи дохилии кунҷ хати ростеро гузаронидан мумкин аст, ки он ҳар ду тарафи кунҷро мебурад, истифода мекунад. Инҳо бошанд, ба постулат баробарқувваанд. Вале бояд қайд кард, ки аз ҳамаи исботҳои постулати 5-ум, ки то замони мо омада расидаанд, мукаммалтаринаш исботи пешниҳодкардаи Тӯсӣ мебошад. Исботи дар нимаи дуюми асри XIII пешниҳодкардаи Шамсиддини Самарқандӣ моҳиятан аз исботҳои Хайём ва Тӯсӣ кам фарқ мекунад.

Кӯшишҳо дар кори исботи постулати 5-ум бесамар бошанд ҳам, онҳо боиси пайдо шудани паҳлуҳои нави назарияи параллелии хатҳои рост гардиданд. Натиҷаҳои дар муддати 5 аср бадастовардаи олимони Шарқи асримиёнагӣ дар оянда асоси тадқиқоти олимони Аврупо шуданд. Онҳо барои пайдоиши геометрияи нав, ба ном-*ғайриэвклидӣ* шароит фароҳам оварданд.

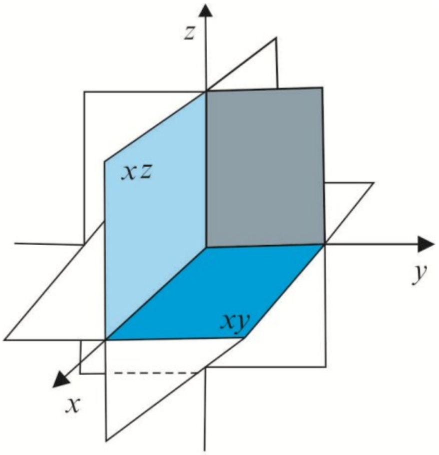
Математики машҳури рус Николай Лобачевский (1792–1856) аввалин шуда исботнопазирии постулатро (соли 1826) нишон дод (Чуноне пайхас кардем, исботи постулати мазкур маънии бо истифодаи дигар аксиомаҳои Уқлидус исбот кардани онро дорад.). Лобачевский мавҷудияти системаи геометриеро муқаррар кард, ки дар он постулати 5-ум ба постулати муқобилаш иваз шудааст. Пайдоиши геометрияи Лобачевский ё *геометрияи* *ғайриэвклидӣ* дар инкишофи геометрия ва умуман математика давраи нав кушод ва боиси такон додани методҳои аксиоматикии тадқиқот шуд (Хотирнишон мекунем, ки баъдтар (соли 1832) геометрияи ғайриэвклидиро математики маҷор Я. Бойя (1802–1860) низ мустақилона кашф кардааст). Аввалин шуда ин геометрияро математики бузурги немис К. Ф. Гаусс (1777–1855) эътироф карда, дар рушди он саҳмгузорӣ кардааст. Барои ҳамин геометрияи ғайриэвклидиро геометрияи Лобачевский-Бойя- Гаусс ҳам мегӯянд.

Ба таърихи назарияи перпендикулярӣ дахл карда ҳаминро қайд мекунем, ки теорема дар бораи се перпендикуляр дар «Ибтидо»-и Уқлидус оварда нашудааст. Ин теоремаро аввалин шуда Насируддини Тӯсӣ дар асари худ «Рисола роҷеъ ба чортарафаи пурра» оварда, исбот кардааст. Дар Аврупо фаронсавиҳо Луи Бертран (1731–1812) якумин шуда тасвияи ин теорема ва Анре Лежандр (1752–1833) дар асараш «Элементҳои геометрия», ки соли 1794 чоп шудааст, исботашро меоранд. Бинобар ин теоремаро дар бораи се перпендикуляр, ки ҳоло дар исботҳо ва дар ҳалли масъалаҳо қурби баланд дорад, теоремаи Тӯсӣ-Бертран-Лежандр номидан аз рӯйи адолат мебуд.

§5. КООРДИНАТАҲО ДАР ФАЗО

Дар курси геометрияи синфи 8 мо аллакай координатаҳои декартиро дар ҳамворӣ омӯхта будем. Дар ҳамон ҷой бо чунин мафҳумҳо, ба монанди координатаҳои нуқта, масофаи байни ду нуқтаи ҳамворӣ, координатаи буриши ду хати рост, ҷойгиршавии ду хати рост нисбат ба системаи координатӣ, табдилдиҳиҳо (ҳаракат, симметрия, параллелкучонӣ), векторҳо, дарозии вектор, зарби адад бар вектор, зарби скалярии векторҳо шинос шуда будем. Акнун ин мафҳумҳоро дар фазо паҳн мекунем.

14. Координатаҳои декартӣ

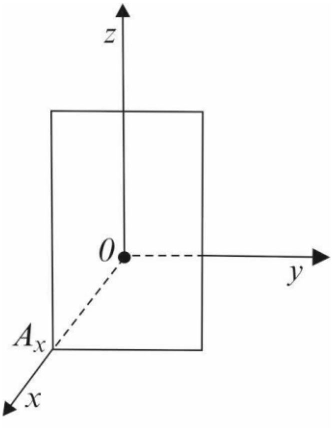


Расми 91

Нуқтаи дилхоҳи фазо *O*-ро гирифта, аз он се хати рости ба якдигар перпендикуляри *Ox, Oy* ва *Oz*-ро мегузаронем. Мувофиқи назарияи пункти 8 чунин созиш ҳамеша имконпазир аст (ниг. ба масъалаи рақами 116). Дар ҳақиқат, кифоя аст, ки дар ҳамворӣ ду хати рости перпендикулярро гирифта, дар нуқтаи буриши онҳо ба ҳамворӣ перпендикуляр барқарор кунем (расми 91).

Аз рӯйи ҳар як ҷуфти ин хатҳо ҳамворӣ мегузаронем. Ҳамвориеро, ки аз рӯйи хатҳои рости *Ox* ва *Oy* мегузарад, ҳамвории *Oxy* меномем.

Ду ҳамвории дигар мувофиқан ҳамвориҳои *Oyz, Oxz* ном доранд. Хатҳои рости *Ox, Oy, Oz* тирҳои координатӣ (*Ox - тири абсисса*, *Oy- тири ордината*, *Oz - тири апликата*), ҳамвориҳои *Oxy, Oyz, Oxz ҳамвориҳои координатӣ* ном доранд. Ҳамвориҳои координатӣ байни худ перпендикуляранд. Нуқтаи буриши тирҳои координатӣ *O ибтидои координата* ном дорад. Нуқтаи *O* ҳар яке аз тирҳои координатиро ба ду нимхатҳои рост - нимтирҳо ҷудо мекунад. Якеашро мусбат, дигарашро манфӣ меномем.

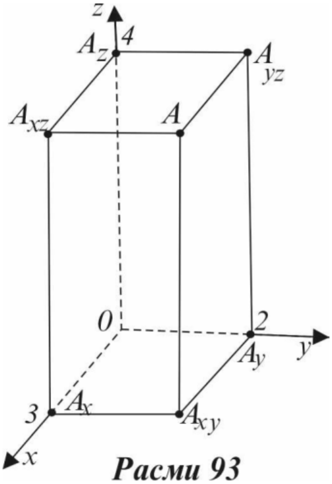


Расми 92

Акнун мафҳуми *координатаи нуқтаро* дохил мекунем. Бигузор нуқтаи дилхоҳи *A* дода шудааст. Аз нуқтаи *A* ҳамвории ба ҳамвории *Oyz* параллелро мегузаронем. Вай тири *Ox*-ро дар ягон нуқтаи A_x мебурад (расми 92). *Координатаи* (абсиссаи) *x*-и нуқтаи *A* гуфта, ададеро меноманд, ки қиматаш ба масофаи порчаи OA_x баробар аст. Ин қимат мусбат аст, агар A_x дар нимтири мусбати тири *Ox* ва манфӣ аст, агар дар нимтири манфӣ воқеъ бошад. Рафту агар A_x бо нуқтаи *O* ҳамҷоя шавад, он гоҳ $x=0$ ҳисоб карда мешавад. Координатаҳои *y* ва *z*-и нуқтаи *A* айнан ҳамин тавр муайян карда мешаванд. Координатаи нуқтаро дар қавс дар паҳлуи ишорати ҳарфии нуқта менависем: $A(x;y;z)$. Баъзан бе ишорати ҳарфӣ ҳам, яъне аз навишти $(x;y;z)$ низ истифода мебарем.

Муҳимтарин масъалае, ки дар ин ҷой пайдо мешавад, чунин аст: магар барои ҳар як се адади батартибовардашудаи $(x;y;z)$ дар фазо нуқтае мавҷуд ҳаст, ки дорои ин координатаҳо мебошад? Ҷавоб мусбат аст. Дар ҳақиқат, дар тирҳо нуқтаҳои $A_x(x;0;0)$, $A_y(0;y;0)$, $A_z(0;0;z)$-ро гирифта, аз онҳо се ҳамвории ба ҳамвориҳои координатӣ параллел (яъне, ба тирҳо перпендикуляр) мегузаронем. Нишон додан мумкин аст, ки ин ҳамвориҳо ҳамдигарро дар як нуқтаи *A* мебуранд. Зоҳиран фаҳмост, ки координатаҳои нуқтаи *A* ададҳои *x, y, z* мебошанд.

Масъалаи 1. Нуқтаи *A(3;2;4)*-ро дар фазои координатӣ тасвир мекунем.



Расми 93

Ҳал. Аз нуқтаҳои *x=3, y=2* ва *z=4* се ҳамвориҳои ба ҳамвориҳои координатӣ параллелро гузаронида мебинем, ки ин ҳамвориҳо ҳамдигарро дар як нуқта мебуранд. Ин нуқта, нуқтаи матлуб мебошад (расми 93).

Эзоҳ. Буриши ин се ҳамворӣ ва ҳамвориҳои координатӣ параллелепипед аст, ки он параллелепипеди координатӣ ном дорад (расми 93).

Барои *A(x;y;z)* андозаҳои ин параллелепипед $|x|$, $|y|$ ва $|z|$ аст.

Масъалаи 2. Нуқтаҳои *A(2;1;4), B(0;2;0), C(2;1;0), D(0; 1 ;2)* дода шудаанд. Кадоми онҳо: 1) дар ҳамвории *Oxy*; 2) дар тири *Oy*; 3) дар ҳамвории *Oyz* ҷойгир буданашонро муайян мекунем.

Ҳал. Барои нуқтаҳои ҳамвории *Oxy* координатаи *z* ба нул баробар аст. Барои ҳамин нуқтаҳои *B* ва *C* дар ҳамвории *Oxy* ҷойгиранд. Барои нуқтаҳои тири *Oy* ду координата *x* ва *z* нуланд. Пас нуқтаи *B* ба тири *Oy* тааллуқ дорад. Нуқтаҳои *B* ва *D* дар ҳамвории *Oyz* ҷойгиранд.

Саволу супоришҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Тирҳо ва ҳамвориҳои координатӣ гуфта, дар фазо чиро меноманд?

2. Ибтидои координата ва нимтирҳо чианд?

3. Чиро нимтирҳои мусбат ва манфӣ мегӯянд?

4. Мафҳуми координатаи нуқта дар фазо чӣ тавр дохил карда мешавад?

5. Чаро координатаҳои нуқта онро дар фазо яккимата муайян мекунанд?

6. Чиро параллелепипеди координатӣ меноманд?

7. Тирҳои координатӣ дар фазо чӣ ном доранд?

Масъалаҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

186. Нуқтаи: 1) *A*(l;-2;2); 2) *B*(4;3;0)-ро дар фазои координатӣ тасвир кунед.

187. Кадоме аз нуқтаҳои *A*(l;0;2), *B*(1;-4;0), *C*(0;1;0), *Д*(0;0;-2), *E*(-1,5;2;0), *F*(-3;0;0) дар: 1) тири *Ox*; 2) тири *Oy*; 3) тири *Oz*; 4) ҳамвории *Oxy*; 5) ҳамвории *Oyz*; 6) ҳамвории *Oxz* ҷойгиранд?

188*. Аз нуқтаҳои (l;0;0), (0;2;0), (0;0;3) се ҳамвории ба ҳамвориҳои координатӣ параллел гузаронида шудааст. Нишон диҳед, ки онҳо дар нуқтаи ягонаи *A*(l;2;3) ҳамдигарро мебуранд.

189. Барои нуқтаи $A(4;l;3)$ параллелепипеди координатиро созед.

190. Координатаҳои қуллаҳои паралллелепипеди координатии нуқтаи $A(2;3;1)$-ро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

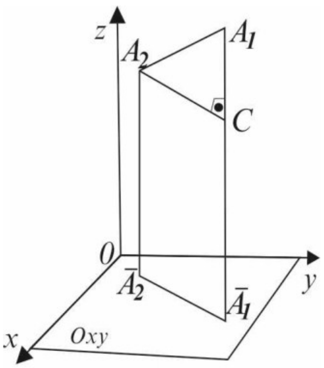
191. Масофаи байни нуқтаҳои $A(-1;3)$ ва $B(4;-1)$-ро, ки дар ҳамворӣ воқеъ мебошанд ёбед.

192. Координатаҳои миёнаҷойи порчаеро, ки нӯгҳояш $A(-2;-5)$ ва $B(-5;2)$ мебошанд, ёбед.

193. Кунҷи байни моили *a* ва ҳамворӣ 30° аст. Проексияи моилро дар ҳамворӣ ёбед.

15. Масофаи байни ду нуқта дар фазо. Координатаҳои миёнаҷойи порча

Бигузор нуқтаҳои $A_1(x_1;y_1;z_1)$ ва $A_2(x_2;y_2;z_2)$ дода шудаанд. Масофаи байни ин ду нуқтаро бо воситаи координатаҳояшон ифода мекунем.



Расми 94

Тавре медонем, масофаи байни ду нуқтаи $\overline{A}_1(x_1;y_1)$ ва $\overline{A}_2(x_2;y_2)$-и ҳамвории Oxy бо формулаи

$$|\overline{A}_1\overline{A}_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

ифода меёбад. Мо шабеҳи (аналоги) ин формуларо барои нуқтаҳои фазо ҳосил мекунем.

Фарз мекунем, ки хати рости A_1A_2 ба тири Oz параллел нест. Аз нуқтаҳои A_1 ва A_2 хатҳои рости ба тири Oz параллелро мегузаронем (расми 94). Онҳо ҳамвории Oxy-ро дар нуқтаҳои $\overline{A}_1$ ва $\overline{A}_2$ мебуранд.

Абсиссаю ординатаи ин нуқтаҳо бо абсиссаю ординатаи нуқтаҳои A_1 ва A_2 якхелаанд, вале апликатаашон нул аст. Аз нуқтаи A_2 ҳамвории ба ҳамвории Oxy паралелро мегузаронем. Вай хати рости $A_1\overline{A}_1$-ро дар нуқтаи C мебурад. Секунҷаи A_1CA_2 росткунҷа аст. Дар ҳақиқат, ҳамвории аз нуқтаи A_2 гузаранда ва бо Oxy параллелбуда ба тири Oz, яъне ба хати ба ин тир параллели $A_1\overline{A}_1$ перпендикуляр аст. Пас, $A_1C \perp A_2C$. Барои ҳамин аз рӯйи теоремаи Пифагор навишта метавонем:

$$A_1A_2^{\,2} = A_1C^2 + CA_2^{\,2}.$$

Вале $CA_2 = |\overline{A}_1\,\overline{A}_2|$; $|\overline{A}_1\,\overline{A}_2| = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, A_1C = |z_2 - z_1|$.

Бинобар ин

$$A_1A_2^{\,2} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Рафту агар порчаи A_1A_2 ба тири Oz паралел бошад, он гоҳ $A_1A_2 = |z_2 - z_1|$ буда, $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ аст ва формулаи ҳосилшуда дар ин ҳолат ҳам ҳамон натиҷаро медиҳад.

Ҳамин тариқ, барои масофаи байни нуқтаҳои A_1 ва A_2 формулаи зерин ҳосил мешавад:

$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Инак, *масофаи байни ду нуқта ба решаи квадратӣ аз суммаи квадрати фарқҳои координатаҳои мувофиқи нуқтаҳо баробар аст.*

Масъалаи 1. Масофаи нуқтаҳои: 1) A(-3;2;1) ва B(4;l;7); 2) A(x;4;-5) ва B(3;l;4)-ро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи формула дорем:

$$1)\left|AB\right| =\sqrt{(4-(-3))^2+(1-2)^2+(7-1)^2}=\sqrt{7^2+1^2+6^2}=\sqrt{86}\,;$$

$$2)\ \left|AB\right|=\sqrt{(3-x)^2+(1-4)^2+(4-(-5))^2}=$$

$$=\sqrt{(3-x)^2+3^2+9^2}=\sqrt{x^2-6x+99}.$$

Масъалаи 2. Дар тири *Ox* нуқтаеро меёбем, ки аз нуқтаҳои $A(1;2;3)$ ва $B(-2;1;1)$ дар як хел масофа ҷойгир аст.

Ҳал. Агар C нуқтаи матлуб бошад, пас $C(x;0;0)$ аст. Мувофиқи шарт квадрати масофаҳо бо ҳамдигар баробаранд, яъне $AC^2=BC^2$. Мувофиқи формулаи масофа ва шарти масъала ҳосил мекунем:

$$AC^2=(x-1)^2+2^2+3^2=(x-1)^2+13,$$

$$BC^2=(x+2)^2+1^2+1^2=(x+2)^2+2$$

ва

$$(x-1)^2+13=(x+2)^2+2 \quad ё \quad x^2-2x+14=x^2+4x+6.$$

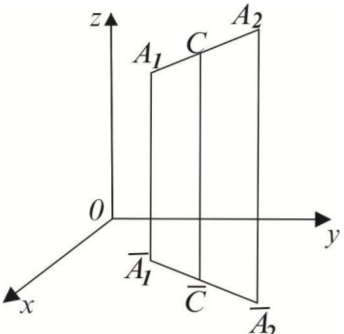
Аз ин ҷой:

$$6x=8 \text{ ва } x=\frac{4}{3}$$

Ҷавоб: $C\left(\frac{4}{3};0;0\right)$.

Акнун координатаҳои миёнаҷойи порчаи A_1A_2-ро бо воситаи координатаҳои нӯгҳои он ифода мекунем (расми

95). Бигузор *C(x;y;z)* миёнаҷойи порчаи A_1A_2 аст. Аз нуқтаҳои A_1, C, A_2 хатҳои ба тири *Oz* параллелро мегузаронем. Онҳо ҳамвории *Oxy*-ро дар нуқтаҳои $\overline{A}_1(x_1, y_1;0), \overline{C}(x;y;0)$ ва $\overline{A}_2(x_2, y_2;0)$, мебуранд. Мувофиқи теоремаи Фалес нуқтаи $\overline{C}$ миёнаҷойи порчаи $\overline{A}_1\overline{A}_2$ аст. Бинобар ин мувофиқи формулаи планиметрӣ дорем:



Расми 95

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Барои ёфтани *z* кифоя аст, ки ба ҷойи ҳамвории *Oxy* ҳамвории *Oxz*-ро гирем. Яъне, порчаи A_1A_2-ро якҷоя бо миёнаҷойи он *C* ба ҳамвории *Oxz* параллел ба тири *Oy* проексия кунем. Дар айни ҳол барои *z* формулаи монанд ҳосил мешавад:

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Чун қоида миёнаҷойи порчаи A_1A_2-ро бо $M_{A_1A_2}$ ишорат мекунем.

Масъалаи 3. Исбот мекунем, ки чоркунҷаи *ABCD*, ки қуллаҳояш *A*(0;2;-3), *B*(-l;l;l), *C*(2;-2;-l), *D*(3;-l;-5) мебошанд, параллелограмм аст.

Ҳал. Дар асоси формула ҳосил мекунем:

$$M_{AC} = M\left(\frac{0+2}{2}; \frac{2-2}{2}; \frac{-3-1}{2}\right) = M(1;0;-2);$$

$$M_{BD}=M\left(\frac{-1+3}{2};\frac{1-1}{2};\frac{1-5}{2}\right)=M(1;0;-2).$$

Инак, диагоналҳои чоркунҷа дар як нуқта бурида шуда, дар нуқтаи буриш ба ду ҳиссаи баробар тақсим мешаванд. Пас, чоркунҷа параллелограмм аст.

Саволу супоришҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Масофаи байни ду нуқта дар фазо бо кадом формула ифода мешавад?

2. Масофаи байни ибтидои координатаҳо ва нуқтаи додашударо чӣ тавр ёфтан мумкин аст?

3. Координатаҳои миёнаҷойи порча, ки нӯгҳояш дода шудааст, ба чӣ баробар аст?

4. Чӣ тавр аз рӯйи координатаҳои чор нуқта муқаррар кардан мумкин аст, ки онҳо қуллаҳои параллелограмманд?

5. Теоремаи Фалесро баён кунед.

Масъалаҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

194. Масофаи байни нуқтаҳои: 1) A(4;0;-2) ва B(2;-l;3); 2) A(-2;4;6) ва B(2; -2; 5)-ро ёбед.

195. Дар тири Oy нуқтаеро ёбед, ки аз нуқтаҳои A(2;3;0) ва B(-l;2;-5) дар як хел масофа ҷойгир аст.

196. Кадоме аз нуқтаҳои A(4;-5;1) ё B(2;l;7) аз ибтидои координатаҳо дуртар аст?

197. Кадоме аз нуқтаҳои A(-3;3;l) ё B(4;-2;l) ба ибтидои координатаҳо наздиктар аст?

198. Масофа аз нуқтаи *A*(2;l;-3)-ро то: 1) ҳамвориҳои координатӣ; 2) тирҳои координатӣ; 3) ибтидои координатаҳо ҳисоб кунед.

199. Нуқтаҳои *A*(-2;3;5), *B*(l;2;4), *C*(4;-3;6) қуллаҳои секунҷаанд. Тарафҳои секунҷаро ёбед.

200. Оё нуқтаҳои *A*(2;-1;0), *B*(0;l;-4), *C*(l;-4;1) қуллаҳои секунҷаанд?

201. Координатаҳои миёнаҷойи порчаи нӯгҳояш нуқтаҳои А(-7;-5;2) ва *B*(4;l;-6) буда чанданд?

202. Магар чоркунҷаи *ABCD*, ки қуллаҳояш дар нуқтаҳои *A*(2;2;-3), *B*(-l;2;l), *C*(2;-3;-l), *D*(-3;-4;-5) ҷойгир аст, параллелограмм мебошад?

203. Нишон диҳед, ки чоркунҷаи *ABCD* ромб аст, агар *A*(0;2;0), *B*(1;0;0), *C*(2;0;2), *D*(1;2;2) бошад.

204. Координатаҳои қуллаи *D*-и параллелограмми *ABCD*- ро ёбед, агар координатаҳои се қуллаи дигари он *A*(0;2;-3), *B*(3;4;5), *C*(4;7;1) дода шуда бошанд.

205. Қуллаҳои секунҷа дода шудаанд: *A*(-4;l;5), *B*(l;0;3), *C*(3;-2;1). Дарозии медианаҳои онро ҳисоб кунед.

206. Як нӯги порча *A*(2;4;-2) ва миёнаҷойи он *C*(l;2;l) дода шудааст. Координатаҳои нӯги дигари порча *B(x;y;z)*-ро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

207. Секунҷаи *ABC* дода шудааст. Исбот кунед, ки:

1) $\sin A = \sin (B + C)$; 2) $\cos A = - \cos (B + C)$ аст.

208. Масофа аз нуқтаи *M*, ки берун аз ҳамвории α ҷойгир аст, то: 1) ҳамвории α, 2) хати росте, ки дар ҳамвории α ҷойгир аст, чӣ тавр муайян карда мешавад?

209. Дарозии хода бояд чанд бошад, то ки охирҳои онро дар ду пояҳои амудии баландиашон 4*м*, 8*м* ва масофаи байнашон 3*м*, гузоштан мумкин бошад?

210. Нуқтаи $A(4;2;5)$ дода шудааст. Координатаҳои қуллаҳои параллелепипеди координатии ин нуқтаро ёбед.

16. Ҳаракат, симметрия ва параллелкӯчонӣ дар фазо

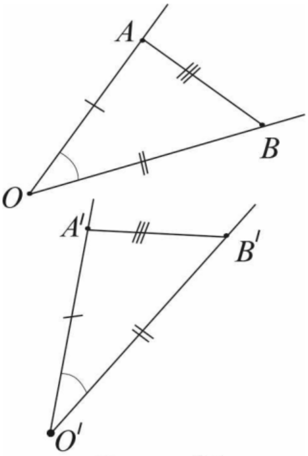
Агар ҳар як нуқтаи фигураи додашударо бо ягон тарз ҷойгардон кунем, фигураи дигарро ҳосил мекунем. Дар ин ҳолат мегӯянд, ки ин фигура аз фигураи додашуда дар натиҷаи *табдилдиҳӣ* ҳосил шудааст. Дар ҳамворӣ чунин табдилдиҳиҳоро, ба монанди ҳаракат, симметрия, параллелкӯчонӣ ва ғайра муоина карда будем. Акнун ин мафҳумҳоро дар фазо паҳн карда, хосияти онҳоро муайян мекунем.

1°. Ҳаракат. Айнан мисли ҳаракат дар ҳамворӣ, ҳаракат дар фазо ҳам як навъи табдилдиҳӣ мебошад.

Таьриф. Табдилдиҳие, ки дар он масофаи байни нуқтаҳо нигоҳ дошта мешавад, *ҳаракат* ном дорад.

Ҳамон тавре, ки дар ҳамворӣ муқаррар карда будем, дар фазо низ исбот карда мешавад, ки ҳангоми ҳаракат хатҳои рост ба хатҳои рост, нимхатҳои рост ба нимхатҳои рост, порчаҳо ба порчаҳо табдил меёбанд ва кунҷҳои байни нимхатҳои рост нигоҳ дошта мешаванд.

Дар ҳақиқат, бигузор нуқтаҳои A,B,C дар як хати рост ҷойгир буда, ҳангоми ҳаракат ба нуқтаҳои A', B', C' табдил ёбанд. Агар фарз кунем, ки B дар байни A ва C ҷойгир бошад, он гоҳ $AB+BC=AC$ аст. Мувофиқи таърифи ҳаракат, аз ин ҷой бармеояд, ки $A'B' + B'C' = A'C'$ мебошад. Ин маънои онро дорад, ки B' дар хати рости $A'C'$ ҷойгир аст (вагарна нобаробарии секунҷа $A'B' + B'C' > A'C'$ иҷро мешуд!) ва бар замми ин дар байни A' ва C'.

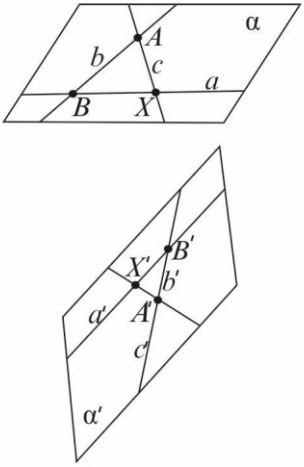


Расми 96

Азбаски хати рост, нимхати рост, порча бо ду нуқтаашон муайян мешаванд, пас ҳангоми ҳаракат хати рост ба хати рост, нур ба нур ва порча ба порча табдил меёбад. Нигоҳ дошта шудани кунҷҳо аз нигоҳдории масофа ва аломати баробарии секунҷаҳо аз рӯйи се тараф бармеояд (расми 96).

Хосияти нави ҳаракат дар фазо бо ҷумлаи зерин ифода меёбад.

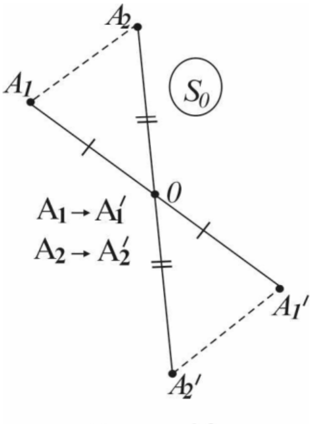
Теоремаи 27. *Ҳаракат ҳамвориро ба ҳамворӣ табдил медиҳад.*



Расми 97

Исбот. Бигузор α ҳамвории дилхоҳ аст (расми 97). Дар он хати рости a ва нуқтаи A-и дар он ҷойгир набударо мегирем. Нуқтаи дилхоҳи B-и хати рости a-ро гирифта, аз рӯйи нуқтаҳои A ва B хати рости b-ро мегузаронем.

Ҳаракат ин хатҳоро ба хатҳои рости a' ва b' табдил медиҳад. Ин хатҳо ҳамҷоя шуда наметавонанд, чунки кунҷи байни a' ва b' ба кунҷи байни a ва b баробар аст. Аз болои хатҳои рости ҳамдигарро бурандаи a' ва b' ҳамвории α'-ро мегузаронем. Исбот мекунем, ки дар ин ҳаракат ҳамвории α ба ҳамвории α' табдил меёбад. Хати рости c-ро мегузаронем, ки хатҳои рости a ва b-ро мебурад (расми 97). Аз сабаби ҳангоми ҳаракат нигоҳ дошта шудани кунҷҳо хати рости c', ки c ба он табдил ёфтааст, хатҳои рости a' ва b'-ро мебурад, яъне c' ва бо он нуқтаи буришаш бо хати a', ки X' аст, дар ҳамвории α' ҷойгир аст. Инак, ҳар гуна нуқтаи ҳамвории α ҳангоми ҳаракат ба нуқтаи ҳамвории α', ё ки α ба α' табдил меёбад. Теорема исбот шуд.

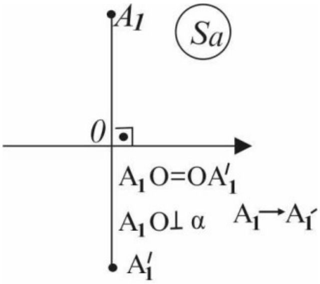


Расми 98

Мисли ҳамворӣ, дар фазо ду фигура *баробар* номида мешавад, агар онҳо ҳангоми ягон ҳаракат ҳамҷоя шаванд.

2°. Симметрия. Табдилдиҳиҳои симметрия нисбат ба нуқта (расми 98), нисбат ба хати рост (расми 99) ва гомотетия айнан мисли табдилдиҳиҳо дар ҳамворӣ дохил карда мешаванд. Дар қатори ин табдилдиҳиҳо дар фазо боз табдилдиҳии симметрияро нисбат ба ҳамворӣ муоина мекунанд. Ин мафҳум чунин дохил карда мешавад.

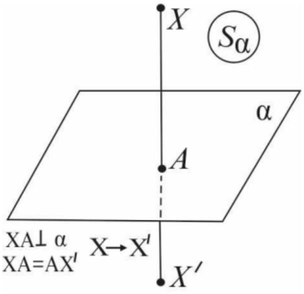
Бигузор α ҳамворӣ буда, X нуқтаи дилхоҳи фигураи фазо аст (расми 100). Аз нуқтаи X перпендикуляри XA-ро фуроварда, дар давоми он порчаи AX'-и ба порчаи AX баробарро ҷудо мекунем. Нуқтаи X' ба нуқтаи X



Расми 99

нисбат ба ҳамвории α *симметрӣ* номида мешавад. Чунин табдилдиҳӣ *табдилдиҳии симметрия нисбат ба ҳамвории* α ном дорад.

Агар нуқтаи X дар ҳамвории α ҷойгир бошад, он гоҳ ҳисоб карда мешавад, ки вай ба худ табдил мегардад. Агар табдилдиҳии симметрия нисбат ба ҳамвории α фигураро ба худаш табдил диҳад, фигураро *нисбат ба ҳамвории* α *симметрӣ* меноманд ва ҳамвории α *ҳамвории симметрияи* он номида мешавад.



Расми 100

Агар барои кӯтоҳгуфторӣ симметрияро нисбат ба нуқтаи O бо $S_о$, нисбат ба хати рости a бо S_a ва нисбат ба ҳамвории α бо S_α ишорат кунем, он гоҳ аз баробарии секунҷаҳои A_1OA_2 ва $A'_1OA'_2$-и расми 98 бармеояд, ки S_o ҳаракат аст, яъне $A'_1A'_2=A_1A_2$. Тавре дида будем, дар ҳамворӣ S_a ҳаракат буд. Нишон медиҳем, ки дар фазо S_a ва S_α низ ҳаракатанд. Барои ин аввал масъалаи зеринро ҳал мекунем.

Масъалаи 1. Нуқтаи (1;2;3) дода шудааст. Нуқтаҳоеро, ки нисбат ба ҳамвориҳои координатӣ ба ин нуқта симметрианд меёбем.

Ҳал. Нуқтае, ки нисбат ба ҳамвории Oxy ба нуқтаи (1;2;3) симметрӣ аст, дар хати рости ба ҳамвории Oxy перпендикуляр воқеъ аст. Бинобар ин координатаҳои x ва y-и онҳо якхела аст: $x=1$, $y=2$. Нуқтаи симметрӣ аз ҳамвории Oxy дар ҳамон масофа (дар дигар тарафаш) воқеъ аст. Бинобар ин координатаи z-и он фақат бо аломаташ фарқ мекунад, яъне $z=-3$. Инак, нуқтае, ки нисбат ба ҳамвории

Oxy ба нуқтаи (1;2;3) симметрӣ мебошад, нуқтаи (1;2;-3) аст. Барои ҳамвориҳои координатии дигар ҳал ҳамин тавр ёфта мешавад.

Теоремаи 28. *Табдилдиҳии симметрия нисбат ба нуқта, хати рост ва ҳамворӣ дар фазо ҳаракат мебошад.*

Исбот. Системаи координатиро ҳамеша чунин интихоб кардан мумкин аст, ки ҳамвории симметрия α бо ҳамвории координатии Oxy ва тири симметрия a бо тири координатии Ox ҳамҷоя шавад. Ҳалли масъалаи боло нишон медиҳад, ки симметрияи $S_a = S_o$ нуқтаи $A(x;y;-z)$-ро ба нуқтаи $A'(x;y;z)$ табдил медиҳад (Ин нуқтаҳо дар ҳамвории Oxy дорои проексияи $A_{xy}(x;y;0)$ буда, аз он дар масофаи якхела ҷойгиранд: $|z|=|-z|$.). Нуқтаи дигари $A_1(x_1;y_1;z_1)$ бошад, ба нуктаи $A'_1(x_1;y_1;- z_1)$ табдил меёбад. Зоҳиран фаҳмост, ки $AA_1=A'A'_1$ аст, яъне S_a ҳаракат мебошад.

Ҳангоми симметрия нисбат ба тири Ox бошад, нуқтаи $A(x;y;z)$ ба нуқтаи $A'(x;-y;-z)$ табдил меёбад (Дар ҳақиқат, миёнаҷойи порчаи AA' нуқтаи $M(x;0;0)$ аст, яъне бо проексияҳои A ва A' дар тири Ox якхела аст.). Мисли пешина нишон додан мумкин аст, ки ин симметрия низ ҳаракат мебошад. Теорема исбот шуд.

Қайд мекунем, ки симметрия дар табиат васеъ паҳн шудааст. Масалан, онро дар шакли баргҳо ва гулҳои растаниҳо, ҷойгиршавии узвҳои гуногуни ҳайвонот ва одамон, ҷисмҳои кристаллӣ мушоҳида кардан мумкин аст. Симметрия дар амалия, сохтмон ва техника васеъ истифода карда мешавад (биноҳо, машинаҳо, механизмҳо ва ғайра).

3°. Параллелкӯчонӣ. Табдилдиҳие, ки дар он нуқтаи дилхоҳи ($x;y;z$)-и фигура ба нуқтаи ($x+a; y+b; z+c$), ки дар ин ҷой a,b,c ададҳои доимианд, табдил меёбад, *параллелкӯчонӣ* дар фазо ном дорад. Параллелкӯчонӣ дар фазо бо формулаҳои

$$x' = x+a,\ y' = y+b,\ z'=z+c$$

ифода мешавад. Дар ин ҷой x', y', z' координатаҳои нуқтае мебошанд, ки ҳангоми параллелкӯчонӣ нуқтаи ($x;y;z$) ба он табдил меёбад. Айнан тавре дар ҳаморӣ исбот карда будем, хосиятҳои зерини параллелкӯчонӣ исбот карда мешаванд:

1. Параллелкӯчонӣ ҳаракат аст;

2. Ҳангоми параллелкучонӣ нуқтаҳо аз рӯйи хатҳои рости параллел (ё ҳамҷояшаванда) ба якхел масофа мекӯчанд;

3. Ҳангоми параллелкӯчонӣ ҳар як хати рост ба хати рости ба он параллел (ё ба худаш) табдил меёбад;

4. Нуқтаҳои A ва A' чӣ гунае набошанд, параллелкӯчонии ягонае ҳаст, ки дар он нуқтаи A ба нуқтаи A' табдил меёбад.

Масъалаи 2. Қиматҳои a,b,c-и дар формулаҳои параллелкучонӣ бударо меёбем, агар маълум бошад, ки нуқтаи $A(2;-4;6)$ ба нуқтаи $A(0;-3;2)$ табдил меёбад.

Ҳал. Координатаҳои нуқтаи A ва A' -ро дар формулаҳои параллелкӯчонӣ гузошта, муодилаҳоро ҳосил мекунем. Аз онҳо a,b,c-ро муайян карда метавонем:

$$0 = 2 + a,\ -3 = -4 + b,\ 2 = 6 + c.$$

Аз ин ҷой: $a = -2,\ b = 1,\ c = -4.$

Хосияти зерин барои параллелкӯчонӣ дар фазо нав аст: *ҳангоми параллелкӯчонӣ дар фазо ҳар як ҳаморӣ ё ба худаш, ё ба ҳамвории ба он параллел табдил меёбад.*

Исботи хосият. Бигузор α ҳамвории дилхоҳ аст. Дар он ду хати рости a ва b-и ҳамдигарро буранда мегузаронем. Мувофиқи хосияти 3, ҳангоми параллелкӯчонӣ ин ду хат ё ба худашон, ё ба хатҳои рости ба онҳо параллели a' ва b' табдил меёбанд. Ҳамвории α ба ҳамвории α', ки аз рӯйи хатҳои рости a' ва b' мегузарад, табдил мешавад. Агар ҳамвории α' бо ҳамвории α ҳамҷоя нашавад, он гоҳ мувофиқи теоремаи 8-и пункти 7 вай ба α параллел аст. Теорема исбот шуд.

Саволу супоришҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чӣ гуна табдилдиҳиро ҳаракат меноманд?

2. Исбот кунед, ки ҳаракат дар фазо ҳамвориро ба ҳамворӣ табдил медиҳад.

3. Табдилдиҳии симметрия нисбат ба нуқта, ба хати рост ва ба ҳамворӣ чӣ тавр муайян карда мешавад?

4. Ҳамвории симметрияи нуқта чист?

5. Исбот кунед, ки табдилдиҳии симметрия нисбат ба нуқта, хати рост ва ҳамворӣ дар фазо ҳаракат аст.

6. Чиро параллелкӯчонӣ меноманд? Хосиятҳоеро, ки ба ин табдилдиҳӣ ҳам дар ҳамворӣ ва ҳам дар фазо хосанд, номбар кунед.

7. Нишон диҳед, ки ҳангоми параллелкӯчонӣ дар фазо ҳар як ҳамворӣ ё ба худаш, ё ба ҳамвории параллел табдил меёбад.

8. Кадом хосияти параллелкӯчонӣ дар фазо шабеҳи худро дар ҳамворӣ надорад?

Масъалаҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

211. Нишон диҳед, ки ҳаракат секунҷаро ба секунҷаи ба он баробар табдил медиҳад.

212. Исбот кунед, ки ҳангоми ҳаракат дар фазо доира ба доираи дорои ҳамон радиус табдил меёбад.

213. Исбот кунед, ки ҳангоми ҳаракат дар фазо се нуқтаи дар як хати ростбуда, ба се нуқтаи дар як хати рост ҷойгирбуда табдил меёбанд.

214. Исбот кунед, ки табдилдиҳии симметрия нисбат ба ҳамвории координатии Oxz бо формулаҳои $x'=x$, $y'=-y$, $z'=z$ дода мешавад.

215. Нуқтаи $A(2;1;-4)$ дода шудааст. Нуқтаҳои нисбат ба ҳамвориҳои координатии ба он симметрия бударо ёбед.

216. Нуқтаи $A(2;l;-4)$ дода шудааст. Нуқтаҳои нисбат ба тирҳои координатии ба он симметрия бударо ёбед.

217. Нуқтаи $A(2;l;-4)$ дода шудааст. Нуқтаҳоеро ёбед, ки онҳо нисбат ба ибтидои координата ба ин нуқта симметрӣ мебошанд.

218. Нишон диҳед, ки параллелкӯчонӣ хати ростро ба хати рости ба он чиликӣ табдил дода наметавонад.

219. Маълум аст, ки нуқтаи $A(2;l;-6)$ ҳангоми параллелкӯчонӣ ба нуқтаи $A'(4;8;3)$ табдил меёбад. Формулаҳои параллелкӯчониро нависед.

220. Маълум аст, ки ҳангоми параллелкӯчонӣ ибтидои координатаҳо ба нуқтаи $A(3;4;-l)$ табдил меёбад. Координатаҳои нуқтаеро ёбед, ки нуқтаи $B(2;-4;-7)$ ба он табдил меёбад.

221. Маълум аст, ки ҳангоми параллелкӯчонӣ нуқтаи

$A(4;7;-2)$ ба нуқтаи $A'(1;-2;0)$ табдил меёбад. Ибтидои координатаҳо дар айни ҳол ба кадом нуқта табдил меёбад?

222. Оё параллелкӯчоние ҳаст, ки дар он нуқтаи A ба нуқтаи B ва нуқтаи C ба нуқтаи D табдил меёбад, агар: 1) $A(2;1;0)$, $B(1;0;1)$, $C(3;-2;1)$, $D(2;-3;0)$; 2) $A(0;1;2)$, $B(-1;0;1)$, $C(3;-2;2)$, $D(2;-3;1)$ бошад.

Масъалаҳо барои такрор

223. Тарафҳои секунҷа ба 0,8 *м*, 1,6 *м* ва 2 *м* баробаранд. Тарафҳои секунҷаи ба ин секунҷа монандро ёбед, ки периметраш ба 5,5 *м* баробар аст.

224. Маълум аст, ки проексияи ду хати рост дар ҳамворӣ ҳамдигарро мебуранд. Исбот кунед, ки ин хатҳои рост параллел нестанд.

225. Ду ҳамвории параллел ва нуқтаи P-и дар байни онҳо ҷойгирнабуда дода шудаанд. Ду хати росте, ки аз нуқтаи P мегузаранд, ҳамвории ба нуқтаи P наздикбударо дар нуқтаҳои A_1 ва A_2, дурбударо мувофиқан дар нуқтаҳои B_1 ва B_2 мебуранд. Дарозии порчаи B_1B_2-ро ёбед, агар $A_1A_2=6$ *см* ва $PA_1 : A_1B_1 = 2 : 3$ бошад.

226. Дар ҳамвории Oxy нуқтаи $D(x;y;0)$-ро ёбед, ки аз нуқтаҳои $A(1;0;-1)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;-1;0)$ дар якхел масофа ҷойгир аст.

§6. ВЕКТОРҲО ДАР ФАЗО

17. Координатаҳои вектор

Ба мисли ҳамворӣ, дар фазо порчаи самтдорро *вектор* меноманд. Зери порчаи самтдори $\overrightarrow{AB}$ порчаи AB-ро мефаҳманд, ки яке аз нӯгҳояш A - *ибтидо* ва нӯги дигараш B ҳамчун *интиҳо* қабул карда мешавад.

Айнан ба монанди ҳамворӣ чунин мафҳумҳои асосӣ барои векторҳо дар фазо, ба монанди самти вектор, қимати мутлақи (дарозии) вектор, баробарии векторҳо дохил карда мешавад.

Агар нуқтаи ибтидоии вектор A дорои координатаҳои $(x_1;y_1;z_1)$ ва нуқтаи интиҳояш B дорои координатаҳои $(x_2;y_2;\ z_2)$ бошад, он гоҳ ададҳои x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1-ро *координатаҳои* вектори $\overrightarrow{AB}$ меноманд. Ду вектор баробар ҳисоб карда мешавад, агар координатаҳои баробар дошта бошанд. Ва баръакс, дар векторҳои баробар координатаҳои мувофиқ баробаранд. Масалан, агар $A(2;7;-3)$, $B(1;0;3)$, $C(-3;-4;5)$ ва $D(-2;3;-l)$ бошанд, он гоҳ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ аст. Дар ҳақиқат,

$$\overrightarrow{AB} = (1 - 2;0 - 7;3 - (-3)) = (-l;-7;6),$$

$$\overrightarrow{DC} = (-3 - (-2);-4 - 3;-4 - 3;5 - (-1) = (-l;-7;6).$$

Айнан ҳамин хел санҷидан мумкин аст, ки $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ мебошад.

Масъалаи 1. Нуқтаҳои $A(4;3;0)$, $B(-l;2;4)$, $C(0;2;5)$, дода шудаанд. Нуқтаи $D(x;y;z)$-ро меёбем, ки барояш $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ аст.

Ҳал. Дорем:

$$\overrightarrow{AB}=(-1-4;2-3;4-0) = (-5;-1;4);$$

$$\overrightarrow{CD}= (x - 0; y - 2; z - 5).$$

Мувофиқи шарти масъала x-0=-5, y-2=-1, z-5=4 ва аз ин ҷой: $x = -5, y=1, z=9$.

Ҷавоб: *D(-5;1;9).*

Тавре дидем, аломати баробарии векторҳо имконият медиҳад, ки барои ишорати вектор координатаҳояшро истифода кунем: $\vec{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$. Агар ҳамаи координатаҳои вектор нул бошанд, он гоҳ вай *вектори нулӣ* ном дорад. Ин вектор самт надорад.

Агар $\vec{a}\,(a_1;a_2;a_3)$ бошад, он гоҳ адади $|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ *дарозӣ ё қимати мутлақ* ва ё *модули вектор* ном дорад. Агар $A(x_1;y_1;z_1)$ ибтидо ва $B(x_2;y_2;z_2)$ интиҳои вектори $\overrightarrow{AB}$ бошанд, он гоҳ дарозии он ба масофаи байни нуқтаҳои A ва B баробар аст:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\ +(z_2-z_1)^2}.$$

Барои баробарии ду вектор зарур ва кифоя аст, ки онҳо самтҳои якхела ва дарозии баробар ё ки координатаҳои якхела дошта бошанд. Вектор *воҳидӣ* номида мешавад, агар дарозии он ба 1 баробар бошад. Масалан, вектори $\vec{a}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ воҳидӣ аст, чунки

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1\,.$$

Масъалаи 2. Маълум аст, ки дарозии векторҳои $\vec{a}$ = (4;1;-2) ва $\vec{b}$=(l;2;z) байни ҳам баробаранд. Қимати z-ро меёбем.

Ҳал. Азбаски $|\vec{a}| = \sqrt{4^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{21}$ ва $|\vec{b}| = \sqrt{1^2+2^2+z^2} = \sqrt{5+z^2}$ аст, пас аз баробарии $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$ бармеояд, ки 21=5+z^2 ё z^2= 16, ё ки $z = \pm 4$. Ҳамин тариқ, векторҳои $\vec{b_1}$ =(l;2;4;) ва $\vec{b_2}$ =(l;2;-4;) бо вектори $\vec{a}$ дарозии якхела доранд.

Саволу супоришҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Чиро дар фазо вектор меноманд?

2. Координатаҳои вектор чӣ тавр муайян карда мешаванд?

3. Шарти баробарии ду вектор бо координатаҳояшон чӣ тавр навишта мешавад?

4. Дарозии вектор бо воситаи координатаҳояш чӣ хел муайян карда мешавад?

5. Вектори нулӣ чист? Оё вай самт дорад? Дарозиаш чанд аст?

6. Чӣ гуна векторро вектори воҳидӣ меноманд?

Масъалаҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

227. Координатаҳои вектори $\overrightarrow{AB}$-ро ёбед, агар: l)A(2;-l;-7) ва B(3;-4;-2); 2) A(0;-l;6) ва B(4;8;-3) бошад.

228. Дарозии вектореро, ки ибтидояш нуқтаи A(0;-2; 3) ва интиҳояш нуқтаи B(4;8;-l) аст, ҳисоб кунед.

229. Дарозии вектори $\vec{a}=(4;-1;-2)$ -ро ёбед.

230. Нуқтаҳои A(1;0;1), B(-1;1;2), C(0;2;-1) дода шудаанд. Нуқтаи $D(x;y;z)$-ро ёбед, агар векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ баробар бошанд.

231. Векторҳои $\vec{a}=(2;1;-4)$ ва $\vec{b}=(x;-1;2)$ дарозии баробар доранд. Қимати x-ро ёбед.

232. Дарозии вектори $\vec{a}=(-a;\ a;-2a)$ ба 6 баробар аст. Ин векторро ёбед.

Масъалаҳо барои такрор

233. Катетҳои секунҷаи росткунҷа ба 7*м* ва 24*м* баробаранд. Ҳамвории α аз гипотенуза гузашта, ба ҳамвории секунҷа кунҷи 30°-ро ташкил медиҳад. Масофаи байни қуллаи кунҷи рост ва ҳамвориро ёбед.

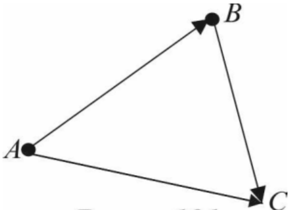
234*. Нуқтаҳои $A(1;0;2)$, $B(2;1;0)$, $C(1;2;0)$ нуқтаҳои пайдарпайи қуллаҳои параллелограмм мебошанд. Суммаи координатаҳои қуллаи чорумро ёбед.

235. Дар тири Oz нуқтаеро ёбед, ки вай аз нуқтаҳои $A(2;1;1)$ ва $B(4;-2;2)$ дар як хел масофа ҷойгир аст.

18. Амалҳо бо векторҳо

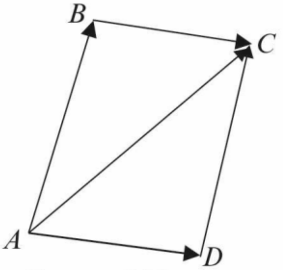
Амалҳо бо векторҳо дар фазо, ба монанди ҷамъи векторҳо, зарби вектор бар адад айнан чун дар ҳамворӣ муайян карда мешаванд. Суммаи векторҳои $\vec{a}=(a_1;\ a_2;\ a_3)$ ва $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ гуфта, вектори $c=(a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3)$ – ро меноманд ва менависанд: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$. Масалан, суммаи векторҳои $\vec{a}$= (-2;1;4) ва $\vec{b}$=(4;-2;3) вектори $\vec{c}$= (2;-1;7) мебошад.

Барои векторҳои дилхоҳи $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ баробариҳои $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ (қонуни ҷойивазкунӣ) ва $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (қонуни гурӯҳбандӣ) ҷой доранд. Барои исботи ин баробариҳо баробар будани координатаҳои қисми чап ва ростро нишон додан зарур аст. Ин бошад, зоҳиран фаҳмост.



Расми 101

Айнан чун дар ҳамворӣ баробарии $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ исбот карда мешавад. Ин баробарӣ *қоидаи секунҷа* ном дорад (расми 101).



Расми 102

Суммаи векторҳое, ки ибтидои умумӣ доранд, ҳамчун диагонали параллелограмми дар ин векторҳо сохташуда тасвир мешавад. Инро *қоидаи параллелограмм* меноманд (расми 102). Дар ҳақиқат, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ *ва* $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ аст. Пас, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Ду вектор *муқобил* номида мешавад, агар суммаи онҳо вектори нулӣ бошад. Векторҳои муқобил дарозии якхела дошта, самташон ба ҳам муқобил аст. Масалан, векторҳои *AB* ва *BA* ҳамеша ба ҳам муқобиланд.

Масъалаи 1. Нуқтаҳои $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$ ва $C(0;2;-1)$ дода шудаанд. Нуқтаи D-ро меёбем, агар маълум бошад, ки суммаи векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ вектори нулӣ аст.

Ҳал. Агар $D(x; y; z)$ бошад, он гоҳ $\overrightarrow{AB}$ = (-2;1;1) ва $\overrightarrow{CD}$ = $(x - 0; y - 2; z +1)$ аст. Пас, мувофиқи шарт дорем:

$$x - 2 =0;\ \ y - 2 +1 =0;\ \ 1 + (z + 1)=0.$$

Аз ин ҷой: x=2, y=l, z=-2.

Ҷавоб: D(2;l;-2).

Ҳосили зарби вектори $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ бар ададӣ λ гуфта, вектори $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$-ро меноманд. Айнан чун дар ҳамворӣ исбот кардан мумкин аст, ки дарозии вектори $\lambda\vec{a}$ ба $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ баробар мебошад. Самти $\lambda\vec{a}$ ҳангоми $\lambda > 0$ будан бо самти $\vec{a}$ якхела буда, ҳангоми $\lambda <0$ будан бо самти $\vec{a}$ муқобил аст.

Чун дар ҳамворӣ ду вектор дар фазо *коллинеарӣ* номида мешавад, агар онҳо дар як хати рост ё дар хатҳои рости параллел ҷойгир бошанд. Самти ду вектори коллинеарӣ якхела ё муқобил аст. Шарти зарурӣ ва кифояи коллинеарии векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ мавҷудияти чунин адади $\lambda\neq0$ аст, ки $\vec{a}= \lambda\vec{b}$. Яъне, $(a_1;a_2;a_3)=\lambda\ (b_1;b_2;b_3) = (\lambda b_1;\ \lambda b_2;\ \lambda b_3)$ ё ки $a_1= \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, $a_3 = \lambda b_3$. Ин се баробариро дар шакли таносуби дучанда навиштан мумкин аст:

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = \lambda\ .$$

Кӯтоҳ карда гуфтан мумкин аст, ки барои коллинеарии ду вектор зарур ва кифоя аст, ки координатаҳои онҳо мутаносиб бошанд.

Масъалаи 2. Векторҳои $\vec{a}$ = (1;-2;1) ва $\vec{b}$ = (3;4;-6) дода шудаанд. Вектори $2\vec{a} - 3\vec{b}$-ро меёбем.

Ҳал. Амалҳои заруриро иҷро карда, ҳосил мекунем:

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = 2 \cdot (1;-2;1) - 3 \cdot (3;4;-6) = (2;-4;2) - (9;12;-18) =$$
$$= (2 - 9; -4 - 12; 2 - (-18)) = (-7; -16; 20).$$

Масъалаи 3. Барои кадом қиматҳои m ва n коллинеарӣ будани векторҳои $\vec{a} = (2;n;3)$ ва $\vec{b} = (3;2;m)$-ро муайян мекунем.

Ҳал. Мувофиқи шарти коллинеарӣ $2:3 = n:2 = 3:m = \lambda$.

Аз ин ҷой: $\lambda = \frac{2}{3}$, $n = 2\lambda = \frac{4}{3}$, $\frac{3}{m} = \frac{2}{3}$, $2m = 9$, $m = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

Ҷавоб: $m=4{,}5$; $n = \frac{4}{3}$.

Саволу супоришҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Суммаи ду вектор дар фазо чӣ тавр муайян карда мешавад?

2. Қоидаи секунҷа барои ёфтани суммаи ду вектор чӣ тавр навишта мешавад? Қоидаи параллелограмм - чӣ?

3. Дар кадом ҳолат ду вектор ба ҳамдигар муқобиланд?

4. Ҳосили зарби вектор бар адад чӣ тавр муайян карда мешавад?

5. Дар кадом ҳолат ду вектор ба ҳамдигар коллинеарианд?

6. Шарти коллинеарӣ бо координатаҳо чӣ тавр навишта мешавад?

7. Барои ҷамъи векторҳо кадом қонунҳо иҷро мешаванд?

Масъалаҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

236. Суммаи векторҳои $\vec{a} = (2;l;-4)$ ва $\vec{b} = (3;4;1)$ -ро ёбед.

237. Суммаи векторҳои $\vec{a} = (1;\ 1{,}4;\ -\ 2{,}3)$, $\vec{b} = (0;\ 1{,}5;\ -\ 2{,}1)$ ва $\vec{c} = \left(\frac{1}{3};\ -4\frac{1}{5};\ 2\right)$ -ро ёбед.

238. Координатаҳои вектореро ёбед, ки вай ба вектори $\vec{a} = (-l;3;-4)$ муқобил аст.

239. Векторҳои $\vec{a} = (2;-l;-4)$ ва $\vec{b} = (l;3;2)$ дода шудаанд. Координатаҳои вектори $-\ 3\vec{a} + 5\vec{b}$ -ро ёбед.

240. Дарозии вектори $3\vec{a} - \vec{b}$ -ро ёбед, агар $\vec{a} = (0;\ -1{,}5;\ 2)$, $\vec{b} = (2;\ 1;-\ 3;)$ бошанд.

241. Кадом шартҳоро координатаҳои нуқтаҳои *A,B,C* бояд қаноат кунонанд, то ки онҳо дар як хати рост ҷойгир бошанд?

242. Барои кадом қиматҳои *m* ва *n* векторҳои: 1) $\vec{a} = (m;2;5)$ ва $\vec{b} = (1;-1;\ n)$; 2) $\vec{a} = (m;n;2)$ ва $\vec{b} = (6;9;3)$ коллинеарианд?

243. Вектори $\vec{a} = (l;2;3)$ дода шудааст. Вектори ба он коллинеариро ёбед, ки ибтидоаш дар нуқтаи $A(1;1;1)$ ва интиҳояш дар ҳамвории *Oxy* ҷойгир аст.

244. Вектори воҳидиеро ёбед, ки ба вектори $\vec{a} = (3;2;-2)$ коллинеарӣ аст?

245. Нуқтаҳои $A(1;0;2)$ ва $B(-l;l;l)$ дода шудаанд. Вектори воҳидии $\vec{a} = (a;b;c)$ -ро ёбед, ки ба вектори $\overrightarrow{AB}$ коллинеарӣ буда, бо он самти якхела дорад.

246. Дар кадом ҳолат вектори $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ ба тири Ox параллел аст?

Масъалаҳо барои такрор

247. Дарозии вектореро, ки ибтидояш нуқтаи $A(4,2;\ 0;\ 1,6)$ ва интиҳояш нуқтаи $b(1,2;\ 1,4;\ 2,4)$ аст, ёбед.

248. Хатҳои рости AB ва CD бурида мешаванд. Хатҳои рости AC ва BD чиликӣ шуда метавонанд?

249. Магар вектори $\vec{a} = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{2}{3}\right)$ воҳидӣ аст?

250. Векторҳои воҳидии (0;l;0), (l;0;0), (0;0;1) дар кадом тирҳои координатӣ ҷойгиранд?

251. Нуқтаҳои B_2 ва C_2 миёнаҷойи порчаи BB_1 ва BC_1-и куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ мебошанд. Периметри буриши кубро бо ҳамвории AB_2C_2 ёбед, агар $AB=a$ бошад.

19. Зарби скалярии векторҳо. Хосиятҳои он

Таъриф. *Зарби скалярии* векторҳои $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$ ва $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$ гуфта, адади $(\vec{a},\vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$-ро меноманд.

Масалан, зарби скалярии векторҳои $\vec{a} = (2;4;0)$ ва $\vec{b} = (-l;3;2)$ ададӣ $2\cdot(-l) + 4\cdot3 + 0\cdot2 = -2 + 12 + 0 = 10$ мебошад.

Аз таърифи зарби скалярии ду вектор бевосита бармеояд, ки вай дорои хосиятҳои зерин аст:

1) $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$;

2) $\left(\vec{a},\vec{a}\right)= a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}=\left|\vec{a}\right|^2$.

Яъне, зарби скалярии вектор бар худаш адади ғайриманфӣ буда, ба квадрати дарозии вектор баробар аст.

3) $(\vec{a}, \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}) = \alpha(\vec{a}, \vec{b}) + \beta(\vec{a}, \vec{c})$, ки дар ин ҷой α ва β ададҳои дилхоҳанд.

Хосиятҳои 1)-3)-ро истифода карда, нишон додан мумкин аст, ки:

1°. $(\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a}) + 2(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{b})$;

2°. $(\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a}) - 2(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{b})$;

3°. $(\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a}) - (\vec{b}, \vec{b})$.

Ҳамин тариқ, барои зарби скалярии векторҳо, ба формулаҳои сумма ва фарқи квадрати муқаррарии ададҳо монанд, формулаҳо ҷой доранд.

Масъалаи 1. Маълум, ки $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 9$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = 6$ аст. Қимати $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$- ро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи хосияти 1° ҳосил мекунем:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}\right) = (\vec{a}, \vec{a}) + 2(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{b}) =$$

$$= 3^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + 9^2 = 90 + 2(\vec{a}, \vec{b}).$$

Адади $2(\vec{a}, \vec{b})$- ро меёбем. Аз рӯйи хосияти 2° ва шарти масъала дорем:

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}\right) = (\vec{a}, \vec{a}) - 2(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{b}) =$$

$$=90 - 2(\vec{a}, \vec{b}) = 6^2 = 36$$

Аз ин ҷой:

$$2(\vec{a}, \vec{b}) = 90 - 36 = 54.$$

Пас,

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = 90 + 2(\vec{a}, \vec{b}) = 90 + 54 = 144.$$

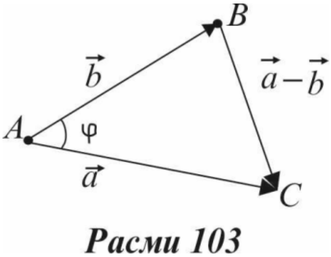
Инак,

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{144} = 12.$$

Ҳарф ба ҳарф чуноне ки дар ҳамворӣ исбот карда будем, нишон дода мешавад, ки зарби скалярии векторҳо ба ҳосили зарби дарозиашон бар косинуси кунҷи байни онҳо баробар аст:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\varphi, \qquad (1)$$

ки дар ин ҷой φ кунҷи байни $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ мебошад (расми 103).



Расми 103

Формулаи (1) асосан дар се маврид истифода карда мешавад:

1) барои ёфтани $(\vec{a}, \vec{b})$ ҳангоми дода шудани $\left|\vec{a}\right|$, $\left|\vec{b}\right|$ ва φ;

2) барои ҳисоби φ ҳангоми дода шудани $(\vec{a}, \vec{b})$, $\left|\vec{a}\right|^2 = (\vec{a}, \vec{a})$, $\left|\vec{b}\right|^2 = (\vec{b}, \vec{b})$;

3) барои муқаррар кардани перпендикулярии векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ (векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ *перпендикуляр* номида мешаванд, агар кунҷи байни онҳо 90° бошад. Аз (1) бармеояд, ки барои перпендикулярии ду вектор зарур ва кифоя аст, ки зарби скалярии онҳо нул бошад).

Масъалаи 2. Координатаҳои вектори $\vec{b}$-ро, ки ба вектори $\vec{a}$ = (-l;l;-2) коллинеарӣ аст меёбем, агар маълум бошад, ки $(\vec{a},\vec{b})$ = 12 аст.

Ҳал. Агар $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ бошад, пас $(\vec{a},\vec{b})=$ $=-1\cdot b_1+1\cdot b_2-2\cdot b_3=12$ аст. Инчунин, мувофиқи шарти коллинеарӣ:

$$\frac{-1}{b_1}=\frac{1}{b_2}=\frac{-2}{b_3} \text{ ё } b_2=-b_1,\ b_3=-2b_2=2b_1.$$

Аз ин ҷой ва аз баробарии $-b_1+b_2-2b_3=12$ меёбем:

$-b_1-b_1-4b_1=12$, яъне $b_1=-2$. Пас, $b_2=2$ ва $b_3=-4$.

Ҷавоб: $\vec{b}$ = (-2; 2; -4).

Масъалаи 3. Барои кадом қимати m перпендикуляр будани векторҳои $\vec{a}$=(m;7;-2) ва $\vec{b}$ = (-3; m;2)-ро муқаррар мекунем.

Ҳал. Дорем: $(\vec{a},\vec{b})=m\cdot(-3)+7\cdot m+(-2)\cdot 2=-3m+7m-4$. Қимати ин ифода нул аст, агар m=l бошад.

Ҷавоб: m=l.

Масъалаи 4. Бузургии кунҷи байни векторҳои $\vec{a}$ = $=(\sqrt{0{,}4};\alpha;1)$ ва $\vec{b}$ = (0; 2; -1) ба $\frac{\pi}{6}$ баробар аст. Қимати α-ро меёбем.

Ҳал. Мувофиқи формулаи (1) ҳосил мекунем:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=$$

$$=\frac{\sqrt{0{,}4}\cdot 0+\alpha\cdot 2-1\cdot 1}{\sqrt{0{,}4+\alpha^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{2\alpha-1}{\sqrt{1{,}4+\alpha^2}\cdot\sqrt{5}}.$$

Аз ин ҷой:

$$2(2\alpha\text{-}1) = \sqrt{15}\cdot\sqrt{1{,}4+\alpha^2}\ .$$

Барои ёфтани ҳалли ин муодилаи ирратсионалӣ ҳар ду тарафро ба квадрат бардошта, ҳосил мекунем:

$$16\alpha^2 - 16\alpha + 4 = 21 + 15\alpha^2,\quad \alpha^2 - 16\alpha - 17 = 0.$$

Решаҳои ин муодилаи квадратӣ $\alpha_1 = -1$ ва $\alpha_2 = 17$ мебошанд. Вале $\alpha_1 = -1$ решаи муодилаи ирратсионалӣ нест, чунки $2\alpha_1 - 1 < 0$ мебошад.

Ҷавоб: $\alpha = 17$.

Саволу супоришҳо барои назорати дониши назариявии хонандагон

1. Зарби скалярии ду вектор чӣ тавр муайян карда мешавад?

2. Хосиятҳои зарби скалярии векторҳоро номбар кунед.

3. Кунҷи байни ду вектори ғайринулӣ бо кадом формула ҳисоб мешавад?

4. Перпендикулярии ду вектор чӣ хел фаҳмида мешавад? Онро чӣ тавр муқаррар кардан мумкин аст?

Масъалаҳо барои мустаҳкам кардани маводди назариявӣ

252. Кунҷи байни векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ 150°, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ аст. Бузургии: 1) $(\vec{a}\,,\vec{b})$; 2) $|\vec{a}+\vec{b}|^2$; 3) $|\vec{a}-\vec{b}|^2$; 4) $(\vec{a}+2\vec{b}\,,\vec{a}\,$- $2\vec{b}\,)$-ро ёбед.

253. Маълум аст, ки $\left|\vec{a}\right| = 11$, $\left|\vec{b}\right| = 23$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = 30$. Қимати $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$-ро ёбед.

254. Маълум аст, ки $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = 1$; $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = 7$. $\left|\vec{b}\right|$-ро ёбед.

255. Барои кадом *n* ин векторҳо перпендикуляранд:

1) $\vec{a}$ = (2;-1;3), $\vec{b}$ = (1;3; *n*); 2) $\vec{a}$ = (*n* -2;1), $\vec{b}$ = (*n*; 2*n*;4)?

256. Се нуқта дода шудааст: *A*(1; 0; 1), *B*(-1; 1; 2), *C*(0; 2; -1). Дар тири *Oz* чунин нуқтаи *D*(0; 0; *c*)-ро ёбед, ки векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ перпендикуляр бошанд.

257. Кунҷи байни векторҳои $\vec{a} = (\alpha;\ 1\sqrt{\frac{6}{5}})$ ва $\vec{b}$ = (3;1;0) ба $\frac{\pi}{4}$ баробар аст. Бузургии α-ро ёбед.

258. Чор нуқта дода шудааст: *A*(0; 1; -1), *B*(1; -1; 2), *C*(3; 1; 0), *D*(2; -3; 1). Косинуси кунҷи байни векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ -ро ёбед.

259. Се нуқта дода шудааст: *A*(0; 1; -1), *B*(1;-1; 2), *C*(3; 1; 0). Косинуси кунҷи *C*-и секунҷаи *ABC* ёфта шавад.

260. Координатаҳои вектори $\vec{b}$-ро, ки ба вектори $\vec{a} = (1;1;-\frac{1}{2})$ коллинеарӣ буда, бо вектори $\vec{\kappa}$ = (0;0;1) кунҷи кундро ташкил мекунад ёбед, агар $\left|\vec{b}\right|$ = 3 бошад.

261. Кунҷи байни векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ 60° буда, вектори $\vec{c}$ ба онҳо перпендикуляр аст. Дарозии вектори $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$-ро ёбед, агар $\left|\vec{a}\right| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = 2$, $\left|\vec{c}\right| = 3$ бошад.

262. Векторҳои $\vec{a}$ = (2; l; 0) ва $\vec{b}$ = (-l; 3; 2) дода шудаанд. Чунин ададӣ λ-ро ёбед, ки вектори $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ ба вектори $\vec{b}$ перпендикуляр бошад.

263. Исбот кунед, ки секунҷаи қуллаҳояш дар нуқтаҳои A(2; l; 3), B(7; 4; 5), C(4;2;1) буда, росткунҷа аст.

Масъалаҳо барои такрор

264. Аз нуқтаи додашуда ба ҳамвори ду моил гузаронида шудааст, ки якеаш аз дигараш 26 *см* калон аст. Проексияи моилҳо ба 12 *см* ва 40 *см* баробар мебошанд. Дарозии моилҳоро ёбед.

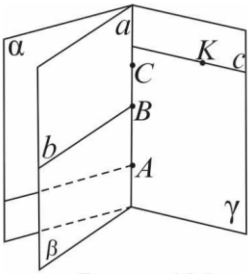
265. Аз нӯги A-и порчаи AB ҳамворӣ гузаронида шудааст. Аз нӯги B ва нуқтаи C-и порча хатҳои рости параллел гузаронида шудаанд, ки онҳо ҳамвориро дар нуқтаҳои B_1 ва C_1 мебуранд. Дарозии порчаи BB_1-ро ёбед, агар AB = 6 *см*, AC: CC_1 = 2 : 5 бошад.

266. Вектори воҳидиеро ёбед, ки ба вектори $\vec{a}$ = (1; 2; - 4) коллинеарӣ аст.

267. Маълум аст, ки ҳангоми параллелкӯчонӣ нуқтаи A(4; -1; 3) ба нуқтаи B(-l; 2; 7) табдил меёбад. Формулаҳои параллелкӯчониро нависед.

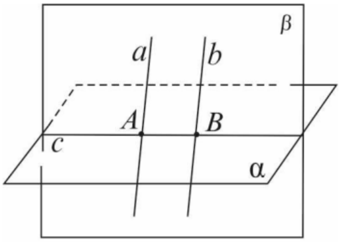
ҶАВОБ ВА НИШОНДОД БА ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО

5. Хати рост дар ҳамин ҳамворӣ ҷойгир аст. **6.** Ҳамвориҳо аз рӯйи хати рости аз ҳамин нуқта гузаранда бурида мешаванд. **7.** На, танҳо қисми ҳамворӣ. **8.** Ба ду қисм. **9.** Ба 4 қисм. **10.** Ду ҳал дорад: 1,2 м ва 1,6 м. **12.** 5 см. **13.** 30 см. **25.** Чунин ҳамвориҳо чортоанд. **36.** Не. **39.** Кунҷҳои тези секунҷа ба 30° ва 60° баробаранд, бинобар ин катетҳо $\frac{C}{2}$ ва $\frac{C\sqrt{3}}{2}$ мебошанд. **40.** а) Ду баландии секунҷа (ё давоми онҳо) ҳамдигарро мебуранд, вагарна ду тарафи секунҷа параллел мебуд, ки ин номумкин аст; б) ду медиана бо тарафи мувофиқ кунҷҳое ташкил мекунанд, ки ҳосили ҷамъашон аз 180° хурд аст, пас, онҳо ҳамдигарро мебуранд ва дар айни ҳол дар дохили секунҷа; в) дар дохили секунҷа ҳатман бурида мешаванд. **49.** $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$. **50.** $\frac{3}{2}a$ ва $\frac{\sqrt{3}}{16}a^2$ **51.** Не. **52**. $4\sqrt{14}$ см. **53.** Ҳа. **55.** Мумкин нест. **56.** Мумкин аст. **61. Исбот.** Дар фазо ягон нуқта, масалан, нуқтаи C -ро чунон интихоб мекунем, ки вай ба ҳеҷ кадоми хатҳои рости чилликии a ва b тааллуқ надошта бошад (ниг. ба расми 104). Аз нуқтаи C ва аз хатҳои рости a ва b мувофиқан ҳамвориҳои α ва β - ро мегузаронем. Ин ҳамвориҳо ҳамдигарро аз рӯйи хати рости a -и аз рӯйи нуқтаи C гузаранда мебуранд. Ҳамвориҳои α ва β гуногунанд. Берун аз хати рости a нуқтаи K ро чунон интихоб мекунем, ки он ба ҳеҷ кадоми ҳамвориҳои α ва β тааллуқ надошта бошад. Аз хати рости a ва нуқтаи K ҳамвории γ - ро мегузаронем. Аз нуқтаи K хати



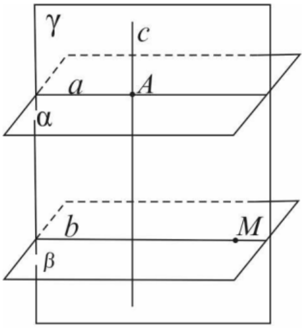
Расми 104

рости *c* - ро мегузаронем, ки он ҳамвориҳои *α* ва *β* - ро бурад, вале хатҳои рости *a* ва *b* - ро набурад. Хатҳои рости чилликии *a* ва *b* хати рости *a* -ро мувофиқан дар нуқтаҳои *A* ва *B* мебуранд, вале бо хати рости *c* нуқтаи умумӣ надоранд. Мувофиқи аломати дуюми чилликии хатҳои рост, хати рости *c* ба ҳар яки хатҳои рости чилликии *a* ва *b* чилликӣ мебошад. **67.** $a=\sqrt{\frac{2S\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}}$, $b=\sqrt{\frac{2S\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta(\alpha+\beta)}}$, $c=\sqrt{\frac{2S\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}}$, ки дар ин ҷо *a,b,c*- тарафҳои секунҷа ва *α, β, π*-(*α*+*β*) кунҷҳои муқобиланд. **69. Исбот.** Бигузор *a* ва *b* хатҳои рости параллел буда, ҳамвории *α* хати рости *a*-ро дар нуқтаи *A* мебурад (ниг. ба расми 105). Аз хатҳои рости *a* ва *b* ҳамвории *β*-ро мегузаронем, ки он ҳамвории *α* - ро аз рӯйи ягон хати рост, масалан, *c* мебурад. Хатҳои рости *a* ва *c* нуқтаи умумии *A* - ро доро мебошанд. Пас, хати рости *c* хати рости *a* ро мебурад. Исбот мекунем, ки вай хати рости *b* - ро низ мебурад. Фарз мекунем, ки *c* хати рости *b* -ро намебурад, он гоҳ *c* ба *b* параллел аст. Аз нуқтаи *A* - и берун аз хати рости *b*, мувофиқи фарзия ба ин хати рост ду хати рости параллел гузашта истодааст. Ин ба аксиомаи параллелии хати рости курси планиметрия зид аст. Пас, хати рости *c* хати рости *b*-ро мебурад. Хати рости *c* бошад, ба ҳамвории *α* тааллуқ дорад. Аз ҳамин сабаб, ҳамвории *α* хати рости *b* - ро низ мебурад. **70.** Не. **73.** $\frac{1}{2}|a-b|$. **74.** 1) 25см; 2) $c\left(1+\frac{b}{a}\right)$. **76.** Ба исботи леммаи пункти 12 ниг. **77.** 2) *a*+*c*-*b*. **78.** Дар ду рӯя - AA_1BB_1 ва AA_1DD_1. **79.** Беҳад бисёр,



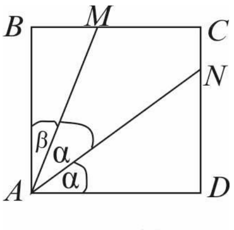
Расми 105

агар нуқта бо хати рости α тааллуқ надошта бошад; ягонто ҳам не, агар нуқта ба α тааллуқ дошта бошад. **80.** 60° ва 120°. **81.** 4 *см* ва 6 *см*. **82.** $\frac{1}{2}\left(\pi + arccos\frac{1}{4}\right)$. **87.** 1) 3,15 см; 2) $\frac{bc}{a+c}$. **88.** Хати рост ва ҳамвории асос параллел мебошанд. **89.** Дар ҳолати ба *CD* параллел будани *A*B. **94.** Аз рӯйи ду хати рости параллел ё ҳамдигарро буранда ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст. **95.** Тасдиқи масъалаи 75-ро истифода баред. **96.** ∠B = 45°. **Нишондод.** Аз монандии секунҷаҳои *ABC* ва *ACD* бармеояд, ки AB = $\sqrt{2}$AC аст. Сипас теоремаи синусҳоро истифода кардан лозим аст. **97.** arctg$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **98. Исбот.** Бигузор α ва β ҳамвориҳои параллел буда, хати рости c яке аз онҳоро, масалан, α -ро дар нуқтаи A бурад (ниг. ба расми 106). Нишон медиҳем, ки хати рости c ҳамвории β -ро низ мебурад. Дар ҳамвории β нуқтаи M-ро мегирем ва аз рӯйи хати рости c ва нуқтаи M ҳамвории γ-ро мегузаронем. Ин ҳамворӣ ҳамвориҳои α ва β-ро аз рӯйи хатҳои рости a ва b мебурад. Мувофиқи теоремаи 10-и пункти 7 тасдиқ кардан мумкин аст, ки a∥b. Фарз мекунем, ки c хати рости b-ро намебурад. Он гоҳ, c ба b параллел мешавад. Аз нуқтаи A-и берун аз хати рости b ба ин хати рост ду хати рости параллели a ва c мегузаранд. Нуқтаи A, хатҳои рости a ва b дар як ҳамворӣ, аниқаш дар ҳамвории γ ҷойгиранд. Мувофиқи аксиомаи хатҳои рости параллел (курси планиметрия) аз нуқтаи A ба хати рости b фақат як хати



Расми 106

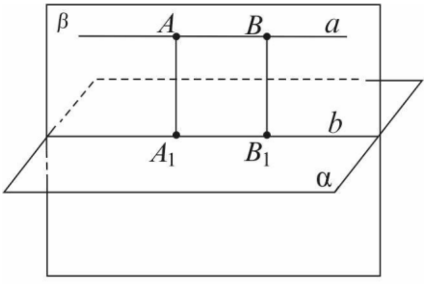
рости параллел, ин ҳам бошад, хати рости a мегузарад. Ба зиддият дучор шудем. Пас, хати рости c хати рости b ва инчунин ҳамвории β-ро мебурад. **102.** ABB_1A_1- параллелограмм, бинобар ин $A_1B_1=AB=4$ см. **104.** Аз ҳалли масъалаи 3-и қисми назариявии пункт ва теоремаи 9 истифода кунед. **105.** 1) *10 см*; 2) *25 см*. **106.** Исбот кунед, ки хатҳои рости AC ва B_1D_1 чиликӣ мебошанд. **109.** Нуқтаҳои буриши ҳамвории *PKL*-ро бо рӯяҳо созед ва исбот кунед, ки ҳамворӣ аз рӯйи миёнаҷойи рӯяҳо мегузарад.



Расми 107

110. Нишондод. Теоремаи 5-ро истифода кунед. **112. Исбот.** Мувофиқи шарти масъала $\angle MAN = \angle NAD = \alpha$ аст (ниг. ба расми 107). Аз ин ҷой меёбем, ки $\beta = 90^0 - 2\alpha.$ Аз секунҷаи ABM бошад, $BM = AM\sin\beta = AM\sin(90^0 - 2\alpha) = AM\cos 2\alpha$ ва $AB = AM\cos\beta =$

$= AM\cos(90^0 - 2\alpha) = AM\sin 2\alpha$ - ро ҳосил мекунем. Аз секунҷаи AND бошад, $DN = AN\sin\alpha$ ва $AD = AN\cos\alpha$ -ро пайдо мекунем. Азбаски $AB = AD$ аст, пас $AM\sin 2\alpha = AN\cos\alpha$ ё $AN = 2AM\sin\alpha.$ Инак, $DN = 2AM\sin^2\alpha.$ Ҳамин тариқ, $BM + DN = AM\cos 2\alpha + 2AM\sin^2\alpha =$ $= AM(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha) = AM.$ **114.** а) Не; б) ҳа; в) не; г) ҳа.

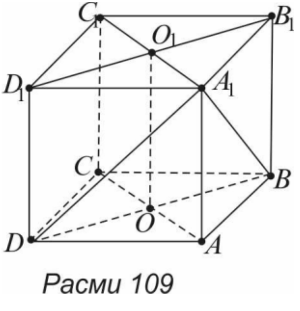


Расми 108

118. Нишондод. Исбот кунед, ки AB ба ҳамвории MAC перпендикуляр аст. **120.** 5 см. **Нишондод.** Барои ҳал формулаи $r = \dfrac{S}{p}$ -ро истифода кунед, ки дар ин ҷо p - нимпериметр ва S – масоҳати секунҷа мебошад. **121.** 200 см^2. **122. Исбот.** Дар хати рост нуқтаҳои A ва B -ро интихоб карда, аз онҳо ба ҳамвории α перпендикулярҳои AA_1 ва BB_1 - ро мегузаронем (ниг. ба расми 108). Дарозии ҳар як порчаҳои AA_1 ва BB_1 масофаи байни хати рости α ва ҳамвории α-ро ифода мекунад. Хатҳои рости AA_1 ва BB_1 ба ҳамвории α перпендикуляранд. Мувофиқи теоремаи 18-и пункти 9 онҳо байни худ параллеланд. Аз хатҳои рости параллели AA_1 ва BB_1 ҳамвории β-ро мегузаронем. Онҳо ҳамдигарро аз рӯйи хати рости A_1B_1 мебуранд. Хатҳои рости a ва A_1B_1 дар як ҳамворӣ, аниқаш дар ҳамвории β ҷойгиранд ва ҳамдигарро намебуранд. Дар акси ҳол хати рости a ҳамвории α -ро мебурид. Пас, хатҳои рости a ва A_1B_1 параллеланд. Аз ин ҷой параллелии порчаҳои AB ва A_1B_1 ҳосил мешавад. Дар чоркунҷаи ABB_1A_1 тарафҳои муқобил ҷуфт-ҷуфт параллеланд. Аз ҳамин сабаб ABA_1B_1 параллелограмм аст. Дар параллелограмм тарафҳои муқобил баробаранд. Пас, AA_1=BB_1. Ҳамин тариқ, муқаррар карда шуд, ки нуқтаҳои A ва B -и хати рости a -и ба ҳамвории α параллел аз ҳамвории α дар як хел масофа ҷойгиранд. **126.** 0,36 м ё 0,44 м. **128.** 1) 4 м; 2) $\frac{a+b}{2}$. **129.** $\frac{a}{2}$. **130.** 9 м. **131.** $\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{2}}$. **132.** 41 см ва 15 см. **133.** 4 см ва 8 см. **134.** $\sqrt{2}$ м. **135.** 5м, 5м, 3м ва 3м. **136.** 6,5 м. **137.** 1) 2 м; 2) $\sqrt{2}$ м. **138.** $4\frac{2}{3}$ см. **139. Нишондод.** Теоремаи косинусҳоро истифода кунед. **140.** 2,5 м. **141.** 2 м. **142.** $\sqrt{2b^2 - a^2}$. **143.** 6 м. **144.** 14 см. **145.** $\sqrt{a^2 - \frac{1}{8}d^2}$. **146.** Не. **147.** $r = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4S}}{2}$, агар S≤$\frac{c^2}{4}$ бошад. **Нишондод.** Барои ёфтани ҳал аз формулаҳои $p = c + r$, $S = pr$, ки дар ин ҷо p -

нимпериметри секунҷа аст, истифода кунед. **148.** $\sqrt{15}$ м. **150.** 1,3м. **152.** 1) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 2) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. **153.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **154.**1,7м. **155.** $\approx$6,46см. **156.** $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$. **157.** $\approx$38,8 см^2. **160.** 1) 45^0; 2) 90°; 3) 60^0. **161.** 1) 2h; 2) $\sqrt{2}h$; 3) $\frac{2h}{\sqrt{3}}$. **162.** $a\sqrt{6}$. **163.** 1) $\frac{\sqrt{3}a}{2}$; 2) $\frac{a}{\sqrt{2}}$. 3) $\frac{a}{2}$. **164.** 30^0 . **165.** $arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$. **166.** $\varphi_1=arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\varphi_2=\varphi_3=arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$. **167.** $a\sqrt{2}$. **168.** *3a.* **169.** 10*см* ва *6см.* **171.** $a=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{2m_b^2+2m_c^2-m_a^2}$; $b=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{2m_a^2+2m_c^2-m_b^2}$; $c=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{2m_a^2+2m_b^2-m_c^2}$.

172. *13см.* **173.** 2*a*. **174.** $arccos\frac{23}{2\sqrt{4081}}$. **175.** 30^0. **176.** 3,36*м.* **178.** $arctg\left(\frac{tg\varphi}{\sqrt{2}}\right)$. **179.** *arctg(2tg φ).* **180.** **Исбот.** Дар куб ҳамаи рӯяҳо аз квадратҳои тарафҳояшон баробар иборатанд. Нуқтаҳои буриши диагоналҳои квадратҳои ABCD ва $A_1B_1C_1D_1$ - ро мувофиқан бо O ва O_1 ишорат карда, онҳоро бо порчаи OO_1 пайваст мекунем (ниг. ба расми 109). Фигураи BB_1D_1D росткунҷа аст ва OO_1 миёнаҷойи тарафҳои BD ва B_1D_1-ро пайваст мекунад. Аз ҳамин сабаб OO_1 ба тарафҳои BB_1 ва DD_1 параллел аст. Хатҳои рости BB_1 ва DD_1 ба ҳамвории асос перпендикуляранд ва хати рости ба онҳо параллели OO_1 низ ба ҳамвориҳои асос перпендикуляр



Расми 109

мешавад (теоремаи 17-и пункти 9). Мувофиқи таърифи 2-и пункти 8, OO_1 ба ҳар гуна хати росте, ки аз нуқтаи O мегузарад, перпендикуляр аст. Пас, хати рости BD - и ҳамвории A_1BD ба ду хати рости OO_1 ва AC - и аз нуқтаи O гузарандаи ҳамвории ACC_1A_1 перпендикуляр аст (BD ва AC диагоналҳои квадрати ABCD ҳастанд ва аз ҳамин сабаб онҳо ба якдигар перпендикуляранд). Мувофиқи теоремаи 14-и пункти 8 хати рости BD ба ҳамвории ACC_1A_1 перпендикуляр мешавад. Ҳамин тариқ, ҳамвории A_1BD хати рости BD - и ба ҳамвории ACC_1A_1 перпендикулярро дорад ва мувофиқи таърифи ҳамвориҳои перпендикуляр (пункти II) вай ба ҳамвории ACC_1A_1 перпендикуляр мешавад. **182.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}м^2$. **183.** 23 *см* ва 17 см. **184.** 60^0. **185. Нишондод.** Шарти масъала ва теоремаи косинусҳоро истифода бурда исбот кунед, ки дар секунҷа ҳар се кунҷ баробаранд. **187.** 1)F; 2) C; 3) D; 4) *B;C;E;F;* 5) C,D; 6*) A,D,F*. **190.** A_x(2;0;0), A_y(0;3;0), A_z(0;0;1), A_{xy}(2;3;0), A_{xz}(2;0;1), A_{yz}(0;3;1), A_{xyz}(2;3;1), O(0;0;0). **191.** $\sqrt{41}$. **192.** M(-3,5;-1,5). **193.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **194.** 1) $\sqrt{30}$; 2) $\sqrt{53}$. **195.** (0;-8,5;0). **196.** *B*. **197.** *A*. **198.** 1) 3,1, 2; 2) $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{5}$, 3) $\sqrt{14}$, **199.** $\sqrt{11}$, $\sqrt{38}$, $\sqrt{73}$. **200.** Ҳа. **201.** M(-1,5;-2;-2). **202.** Не. **203.** Ҳа. **204.** D(1;5;-7). **205.** 7, $\frac{\sqrt{10}}{2}$, $\frac{\sqrt{142}}{2}$. **206.** B(0;0;4). **209.** *5 м* **210.** A_x(4; 0; 0), A_y(0; 2; 0), A_z(0; 0; 5), A_{xy}(4;2;0), A_{xz}(4; 0;5), A_{yz}(0; 2; 5),

A_{xyz}(4;2;5), O(0,0,0). **215.** (2; 1; 4), (2;-1;-4), (-2;1;-4). **216.**

(2;-1; 4), (-2; 1;4), (-2; -1; -4). **217.** (-2; -1; 4). **219.** $x'=x+2$,

$y'=y+7$, $z'=z+9$. **220.** (5;0;-8). **221.** (-3;-9;2). **222.** 1) Не; 2) Ҳа. **223.** 1*м,* 2*м,* 2,5*м*. **225.** 15 см. **226.** $D\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3};0\right)$. **227.** 1) (1;-3;5); 2) (4;9;-9). **228.** $2\sqrt{33}$. **229.** $\sqrt{21}$. **230.** $D(-2;3;0)$. **231.** $x=\pm4$. **232.** $\vec{a}=\left(-\sqrt{6};\ \sqrt{6};\ -2\sqrt{6}\right)$. **233**. 3,38м. **234**. 3. **235.** (0;0;9). **236.** (5;5;-3). **237.** $\left(\frac{4}{3};\frac{71}{10};-\frac{12}{5}\right)$. **238.** $\vec{b}=\left(1,-3;\ 4\right)$. **239**. (-1; 18; 22). **240**. ≈8,3. **242.** 1) $m=-2$, $n=-2{,}5$; 2) $m=4$, $n=6$. **243.** $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};-1\right)$. **244.** $\left(\frac{3}{\sqrt{17}};\frac{2}{\sqrt{17}};-\frac{2}{\sqrt{17}}\right)$ *ё* $\left(-\frac{3}{\sqrt{17}};-\frac{2}{\sqrt{17}};\frac{2}{\sqrt{17}}\right)$. **245.** $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. **246.** Ҳангоми $a_2=a_3=0$ будан. **247.** $\sqrt{11{,}6}$. **248.** Не. **249.** Не. **250.** Дар тирҳои *Oy*, *Ox* ва *Oz*. **251.** $(2+\sqrt{5})a$. **252.** 1) $-3\sqrt{3}$; 2) $13-6\sqrt{3}$; 3) $13+6\sqrt{3}$; 4) -7. **253.** 20. **254.** 4. **255.** 1) $n=\frac{1}{3}$; 2) $n=2$. **256.** $D(0,0,1)$. **257.** $\alpha=1$. **258.** $\frac{5\sqrt{7}}{21}$. **259.** $\sqrt{\frac{2}{15}}$. **260.** (2;2;-1). **261.** 4. **262.** $\lambda=-14$. **264.** 15 см ва 41 см. **265.** 15 см. **266.** $\left(\frac{1}{\sqrt{21}};\frac{2}{\sqrt{21}}-\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$ ва $\left(-\frac{1}{\sqrt{21}};-\frac{2}{\sqrt{21}};\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$. **267.** $x'=x-5$, $y'=y+3$, $z'=z+4$.

МАЪЛУМОТНОМАИ МУХТАСАР ДАР БОРАИ МАФҲУМҲОИ АСОСИИ КУРСИ ГЕОМЕТРИЯИ СИНФИ 10-ум

Системаи аксиомаҳои стереометрия

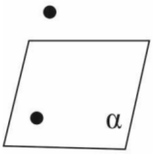
Стереометрия як шохаи илми геометрия буда, шакл, андоза ва ҷойгиршавии байниҳамдигарии фигураҳои фазоиро меомӯзад.

C_1. *Ҳамворӣ чи хеле ки бошад, нуқтае ҳаст, ки ба он таллуқ дорад ва нуқтае ҳаст, ки ба он тааллуқ надорад (Расми 1).*

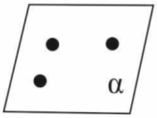
C_2. *Аз се нуқтае, ки дар як хати рост ҷойгир нестанд, танҳо як ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст (Расми 2).*

C_3. *Ҳамвории бо хати рост ду нуқтаи умумидошта тамоми хати ростро дар бар мегирад (Расми 3).*

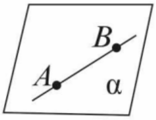
C_4. *Буриши ду ҳамвории ҳамдигарро буранда хати рост аст (Расми 4).*



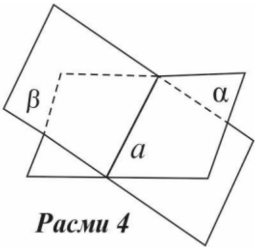
Расми 1



Расми 2



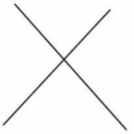
Расми 3



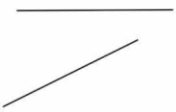
Расми 4

Вазъи ҷойгиршавии хатҳои рост ва ҳамвориҳо дар фазо

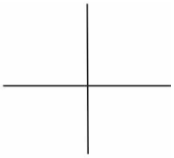
Хатҳои рости параллел



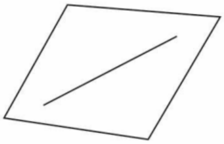
Хатҳои рости буранда



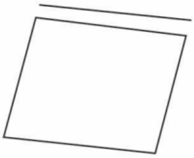
Хатҳои рости чиликӣ



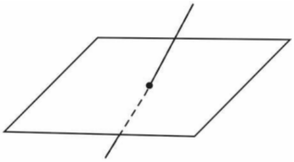
Хатҳои рости перпендикуляр



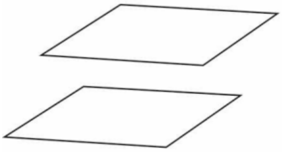
Хати рост дар ҳамворӣ воқеъ аст



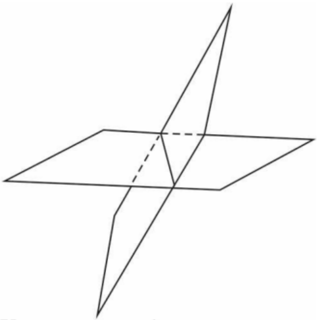
Хати рост ва ҳамворӣ параллеланд



Хати рост ва ҳамворӣ якдигарро мебуранд



Ҳамвориҳо параллеланд

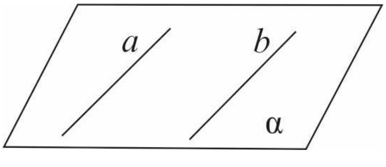


Ҳамвориҳо якдигарро мебуранд

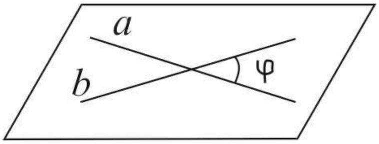
Кунҷҳо дар фазо

Кунҷи байни хатҳои рост

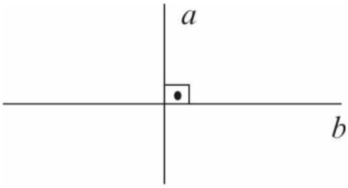
1. Кунҷи байни хатҳои рости параллел: *агар хати рости a ба хати рости b параллел бошад, он гоҳ кунҷи байни онҳо ба* 0° *баробар аст, яъне агар* $a||b$*, он гоҳ* $\angle(a,b)=0^{\circ}$.



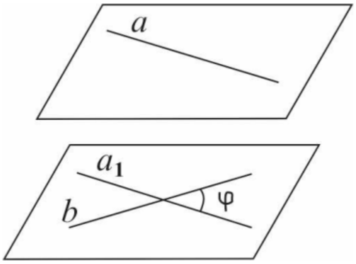
2. Кунҷи байни хатҳои рости буранда: *ченаки кунҷии кунҷи хурдтарине, ки ҳангоми буриши хатҳо ҳосил мешавад:* $\angle(a,b)=\varphi$.



3. Кунҷи байни хатҳои рости перпендикуляр: $\angle(a,b) = 90^0$.

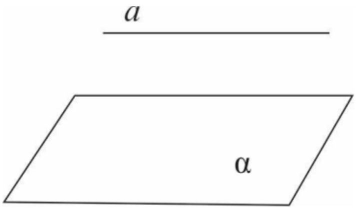


4. Кунҷи байни хатҳои рости чиликӣ: *агар а ва* b *хатҳои рости чиликӣ бошанд, он гоҳ* $\angle(a,b) = \angle(a_1,b) = \varphi$ *аст, ки дар ин ҷой* $a||a_1$ *мебошад.*

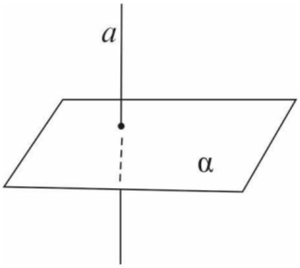


Кунҷи байни хати рост ва ҳамворӣ

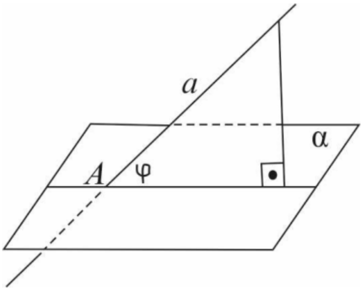
1. Кунҷи байни хати рост ва ҳамворие, ки бо ҳам параллеланд: *агар хати рост ба ҳамвории додашуда параллел бошад ва ё дар он ҷойгир бошад, он гоҳ кунҷи байни онҳо ба* 0° *баробар аст, яъне агар* $a||\alpha$*, он гоҳ* $\angle(a,\alpha) = 0^\circ$.



2. Кунҷи байни хати рост ва ҳаморие, ки бо ҳам перпендикуляранд: *агар хати рост ба ҳамвории додашуда перпедикуляр бошад, он гоҳ кунҷи байни онҳо ба* 90° *баробар аст, яъне агар а* $\perp \alpha$, *он гоҳ* $\angle(a, \alpha) = 90^{\circ}$.

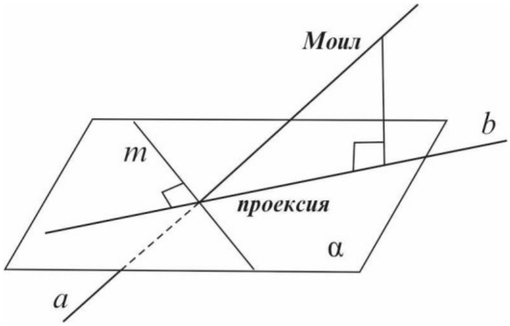


3. Кунҷи байни хати рост ва ҳаморие, ки якдигарро таҳти кунҷи аз 90° **фарқкунанда мебуранд:** *кунҷи байни хати рости а ва ҳамвории* α *гуфта, кунҷи байни хати рости а ва проексияи онро дар ҳамвории* α *меноманд*: $\angle(a, \alpha) = \angle A = \varphi$.



Теорема дар бораи се перпендикуляр

Агар хати рости дар ҳамворӣ воқеъбуда ба проексияи моили ба ин ҳамворӣ гузаронидашуда перпендикуляр бошад, он гоҳ вай ба худи моил низ перпендикуляр аст, яъне агар $m \perp b$, *он гоҳ* $m \perp a$. *Агар хати рост ба моил перпендикуляр бошад, он гоҳ вай ба проексияи он низ дар ҳамон як ҳамворӣ перпендикуляр аст.*



Кунҷи байни ҳамвориҳо

1. *Кунҷи байни ҳамвориҳои параллел ба* 0° *баробар аст.*

2. *Кунҷи байни ҳамвориҳои перпендикуляр ба* 90° *баробар аст.*

3. *Кунҷи байни ду ҳамворӣи ҳамдигарро бурандаи* α *ва* β *гуфта, кунҷи байни хатҳои рости а ва* b*-ро меноманд, ки ҳангоми бо ҳамвории дилхоҳи* γ *бурида шудани* α *ва* β *ҳосил мешавад.*

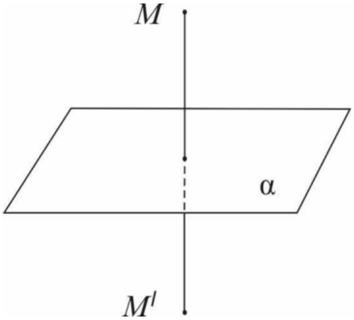
Масоҳати проексияи перпендикулярӣ

Масоҳати проексияи перпендикулярии бисёркунҷа дар ҳамворӣ ба ҳосили зарби масоҳати он ба косинуси кунҷи байни ҳамвории бисёркунҷа ва ҳамвории проексия баробар аст. Масалан, дар ҳолати секунҷа будани бисёркунҷа: $S_{\Delta A_1BC} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos\varphi.$

Ҳаракат, симметрия ва параллелкӯчонӣ дар фазо

Ҳаракат - *ин табдилдиҳиест, ки дар он масофаи байни нуқтаҳо нигоҳ дошта мешавад.*

Симметрия нисбат ба ҳамвории *α* дар фазо - *ин табдили фазо, ки ҳангоми он ҳар як нуқтаи М ба нуқтаи* M′ *чунон табдил меёбад, ки порчаи М*M′ *ба ҳамвории α* *перпендикуляр мебошад ва ба воситаи он ба ду ҳиссаи баробар ҷудо мешавад.*



Табдилдиҳии симметрия нисбат ба нуқта, хати рост ва ҳамворӣ дар фазо ҳаракат мебошад.

Параллелкӯчонӣ - *табдилдиҳие, ки дар он нуқтаи дилхоҳи (x;y;z)-и фигура ба нуқтаи (x+a; y+b; z+c), ки дар ин ҷой a,b,c ададҳои доимианд, табдил меёбад.* **Формулаи параллелкӯчонӣ:** $x'=x+a$, $y'=y+b$, $z'=z+c$.

Масофаи байни ду нуқта дар фазо

Агар $A_1(x_1;y_1;z_1)$ ва $A_2(x_2;y_2;z_2)$ ду нуқтаи дилхоҳи фазо бошанд, он гоҳ масофаи байни онҳо чунин аст:

$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ .$$

Координатаҳои миёнаҷойи порча дар фазо

Агар $A_1(x_1;y_1;z_1)$ ва $A_2(x_2;y_2;z_2)$ ду нуқтаи дилхоҳи фазо бошанд, он гоҳ координатаҳои миёнаҷойи онҳо чунин аст:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\qquad z=\frac{z_1+z_2}{2}\ .$$

Векторҳо дар фазо ва амалҳо бо онҳо

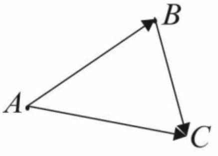
Порчаи самтдорро **вектор** меноманд.

Дарозии вектори $\vec{a}$ =(a_1;a_2;a_3): $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

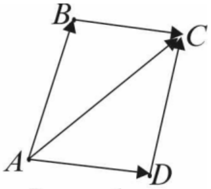
Суммаи векторҳои $\vec{a}$ = (a_1; a_2; a_3) ва $\vec{b}$ = (b_1;b_2;b_3): $\vec{c} = (a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3)$, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

Қоидаи секунҷа: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Расми 5).

Қоидаи параллелограмм: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (Расми 6).



Расми 5



Расми 6

Ҳосили зарби вектори $\vec{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$ бар адади λ: $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3)$.

Зарби скалярии векторҳои $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ва $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$: $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Хосиятҳои зарби скалярии векторҳои $\vec{a}$ **ва** $\vec{b}$ **:**

1. $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$;
2. $(\vec{a},\vec{a}) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$;
3. $(\vec{a}, n\vec{b} + m\vec{c}) = n(\vec{a},\vec{b}) + m(\vec{a},\vec{c})$; *m ва n -ададҳои дилхоҳ;*
4. $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a}) + 2(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{b})$;
5. $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a}) - 2(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{b})$;
6. $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a}) - (\vec{b}, \vec{b})$.

Кунҷи байни векторҳои $\vec{a}$ **ва** $\vec{b}$ **:** $cos\alpha = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Мундарица

АЛИЕВ БОЙМУРОД

ГЕОМЕТРИЯ

(ибтидои стереометрия)
Китоби дарсӣ барои синфи 10-уми муассисаҳои таҳсилоти умумӣ

Муҳаррир: *Абдукаримов Маҳмадсалим*
Мусаҳҳеҳ: *Алиева Марҳабо*
Саҳифабанд ва тарроҳ: *Қодиров Эргаш*

Ба чоп 04.04. 2020 иҷозат дода шуд. Андозаи 60x90 1/16.
Коғази офсети №1. Ҷузъи чопию шартӣ 11,5. Адади нашр
80 000 нусха. Супориши №09/2020

Дар КВД “Комбинати полиграфии шаҳри Душанбе”,
Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Душанбе, хиёбони С. Айнӣ, 126
чоп шудааст.