Ҷ. ШАРИФОВ, У. БУРҲОНОВ

ГЕОМЕТРИЯ

9

Китоби дарсӣ барои синфи 9-уми
муассисаҳои таҳсилоти умумӣ

Нашри сеюм

Вазорати маориф ва илми
Ҷумҳурии Тоҷикистон
тасдиқ кардааст

ДУШАНБЕ
МАОРИФ
2023

ТДУ (УДК) 514 (075)+371.671+373
ТКБ (ББК) 22.151 (Я72)+74.262
Ш-30

Ш-30. Шарифов Ҷ., Бурҳонов У. **Геометрия.** Китоби дарсӣ барои синфи 9-уми муассисаҳои таҳсилоти умумӣ. – Нашри сеюм. – Душанбе: “Маориф”, 2023. –112 саҳ.

Хонандагони азиз!

Китоб манбаи донишу маърифат аст. Аз он баҳравар шавед ва онро тоза нигоҳ доред! Кӯшиш кунед, ки соли таҳсили оянда ҳам ин китоб ҳамин гуна зебову ороста дастраси хонандагони дигар гардад ва онҳо низ аз он истифода баранд.

Ҷадвали истифодаи китоб

№	Ному насаби хонанда	Синф	Соли таҳсил	Ҳолати китоб (баҳои китобдор)	
				Аввали сол	Охири сол
1					
2					
3					
4					
5					

ISBN 978-99985-39-43-3

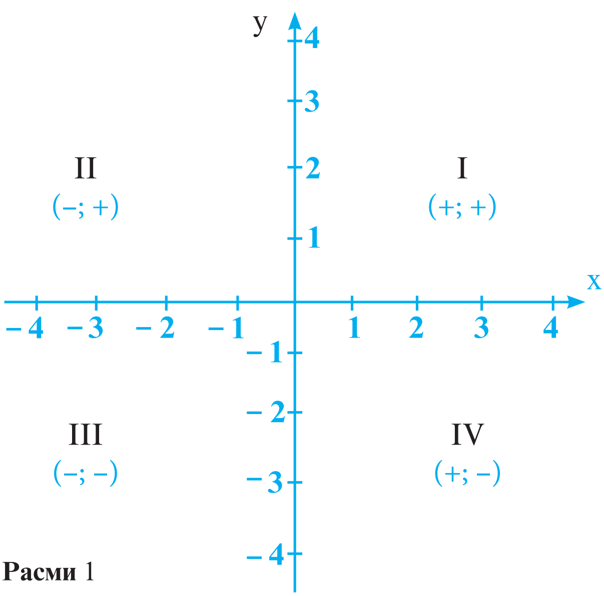
ФАСЛИ I. КООРДИНАТАҲОИ ДЕКАРТӢ ДАР ҲАМВОРӢ

§ 1.1. Ҳамвории координатӣ

1. Мафҳуми ҳамвории координатӣ

Дар ҳамворӣ аз нуқтаи *O* ду хатти рости *x* ва *y*-и бо ҳам перпендикулярро мегузаронем (расми 1). Хатти рости *x* чун қоида ба таври уфуқӣ ва хатти рости *y* ба таври амудӣ ҷойгир карда мешаванд.

Порчаи воҳидиеро интихоб карда, дар тири *x* аз нуқтаи *O* ба тарафи рост ва чап, дар тири *y* аз нуқтаи *O* ба тарафи боло ва поён порчаҳои баробарро мегузорем. Дар хатти рости *x* аз нуқтаи *O* ба тарафи рост ададҳои мусбат ва ба тарафи чап ададҳои манфиро ҷойгир мекунем. Хатти рости *x* тири абсисса ном дорад. Дар хатти рости *y* аз нуқтаи *O* ба тарафи боло ададҳои мусбат ва ба тарафи поён ададҳои манфиро мегузорем. Хатти рости *y* тири ордината ном дорад (расми 1).



Расми 1

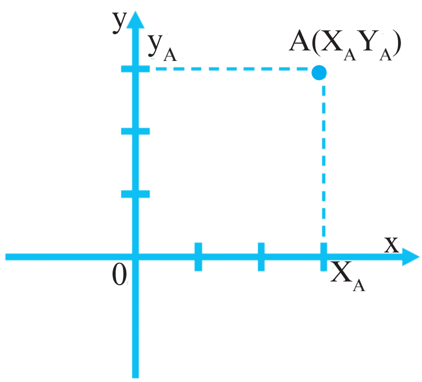
Ин ду тир ҳамвориро ба чор қисм тақсим мекунанд. Ҳар кадоми онҳо чоряк ном дорад (Чоряқҳои I, II, III ва IV дар расми 1).

Ҳамворие, ки ба воситаи тирҳои координатӣ ба чор чоряк тақсим карда шудааст, ҳамвории координатӣ номида мешавад. Нуқтаи *O*, ки буриши тирҳои абсисса ва ордината мебошад, ибтидои координатаҳо ном дорад. Ҳамвории координатиро аксаран ҳамвории (x_y) меноманд. Дар таърихи илми математика олими фаронсавӣ Рене Декарт (1596-1650) аввалин шуда, мафҳуми ҳамвории координатиро дохил кардааст.

Аз ин рӯ, ба хотири ин олим ҳамвории координатиро гоҳе ҳамвории декартӣ низ меноманд.

Агар дар ҳамвории координатӣ ягон нуқтаи *A*-ро қайд кунему аз ин нукта то тири абсисса (x) перпендикуляр фурорем, асоси перпендикуляр ба кадом ададе, ки мувофиқ ояд, абсиссаи нуқтаи A мебошад. Агар аз нуқтаи A ба тири ордината (y) перпендикуляр гузаронем, асоси ин перпендикуляр ба ададе мувофиқ меояд, ки он координатаи нуқтаи *A* ном дорад.

Агар адади x_A - абсисса ва адади y_A - ординатаи нуқтаи A бошад, мегӯянд, ки нуқтаи A дорои координатаҳои x_A ва y_A мебошад (расми 2). Ибораи «нуқтаи A бо координатаҳои x_A ва y_A» чунин ишора карда мешавад: A (x_A, y_A).



Расми 2

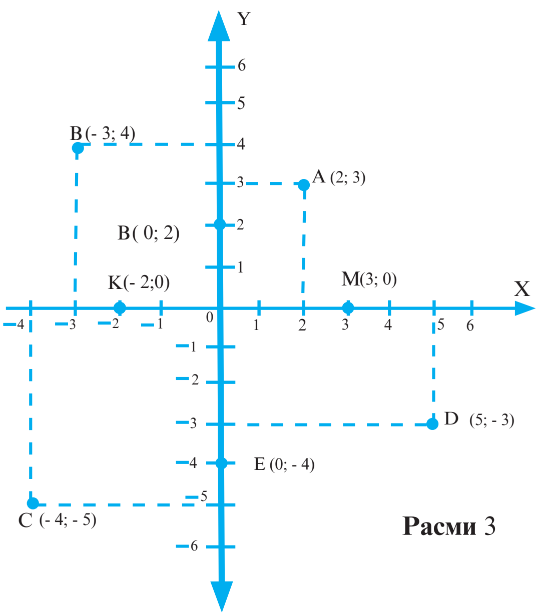
Ҳамвории координатиро системаи координатаҳо низ ном мебаранд.

Масъалаи 1. Дар ҳамвории координатӣ нуқтаҳои зеринро тасвир намоед:

A (2; 3), *B* (- 3; 4), *C* (- 4; 5) ва *D* (5; - 3).

Ҳал. Дар расми 3 нуқтаи *A* (2; 3) дар чоряки якум тасвир ёфтааст. Аз тири *x* нуқтаи ба адади 2 мувофиқро ёфта, аз он хатти рости ба тири *x* перпендикуляр месозем. Дар тири у нуқтаи ба адади 3 мувофиқро ёфта, аз он ба тири *y* перпендикуляр мегузаронем. Буриши ҳар ду перпендикуляр нуқтаи *A* (2; 3) мебошад. Нуқтаҳои *B* (- 3; 4), *C* (- 4; -5) ва *D* (5; - 3) низ ҳамин тавр сохта мешаванд.

Нуқтаи намуди *M* (*x*; 0) дар тири *x* мехобад. Дар расми 3 нуқтаҳои *M* (3; 0) ва *K* (2; 0) дар тири абсисса ҷойгиранд. Нуқтаи намуди *P* (0; у) дар тири ордината мехобад. Дар расми 3 нуқтаҳои *P* (0; 2) ва *E* (0; 4) аз мисоли чунин нуқтаҳоянд. Нуқтаи *0* (0; 0) ибтидои системаи координата мебошад.



Расми 3

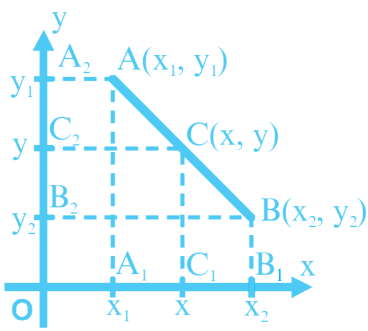
Супориш. 1) Нуқтаҳои A (- 3; 6), B (- 2; - 4), C (4; - 3), D (- 8; 2), P (7; 0), E (0; 5), M (- 5; 0), F (0; - 6)-ро дар ҳамвории координатӣ тасвир намоед.

2) Қуллаҳои чоркунҷа нуқтаҳои A (3; - 2), B (- 4; 5), C (- 3; 3), D (-2; 5) мебошанд. Чоркунҷаи $ABCD$-ро дар ҳамвории координатӣ тасвир намоед. Кадом тарафҳои чоркунҷа тирҳои координатаҳоро мебуранд? Координатаҳои нуқтаҳои буришро ёбед.

§ 1.2. Координатаҳои миёнаҷойи порча

Дар расми 4 нӯгҳои порчаи AB нуқтаҳои A $(x_1; y_1)$ ва B $(x_2; y_2)$ мебошанд.

Нуқтаи C $(x; y)$ дар миёнаҷойи порчаи AB воқеъ аст. Аз ҳар се нуқта ба тирҳои x ва y перпендикуляр мегузаронем.



Расми 4

Нуқтаи C_1 миёнаҷойи порчаи A_1B_1 ва нуқтаи C_2 миёнаҷойи порчаи A_2B_2 мебошад. Аз ин ҷо $|x-x_2| = |x-x_1|$ ва $|y-y_2| = |y-y_1|$ мешавад. Ҳар кадоме аз ин муодилаҳоро дар ҳолати $x_1 \neq x_2$ ва $y_1 \neq y_2$ ҳал менамоем:

$$x-x_1 = -(x-x_2) \text{ ва } y - y_1 = -(y-y_2);$$

$$2x = x_1 + x_2 \text{ ва } 2y = y_1 + y_2;$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ ва } y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Ҳамин тариқ, нуқтаи C-и миёнаҷойи порчаи AB дорои чунин координатаҳост:

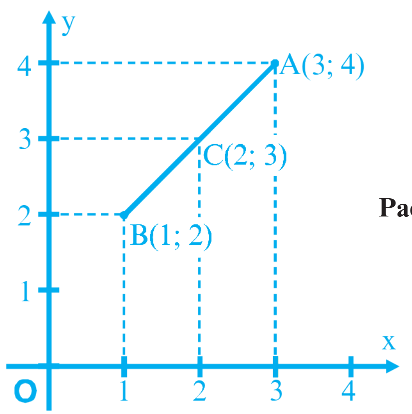
$$C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Формулаҳои $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ ва $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ дар ҳолати $x_1 = x_2$ ва $y_1= y_2$ низ дурустанд. Дар ин ҳолат ё порчаи AB ба тири x ё порчаи AB ба тири y параллел мебошад.

Масъалаи 2. Координатаҳои нуқтаи B $(x; y)$-ро ёбед, агар нуқтаи A (3; 4) маълум буда, миёнаҷойи порчаи AB нуқтаи C (2 ; 3) бошад.

Ҳал. Аз формулаи $x_c=\frac{x_A+x_B}{2}$ ва $y_c=\frac{y_A+y_B}{2}$ меёбем: $2=\frac{3+x}{2}$ ва $3=\frac{4+y}{2}$. Аз ин ҷо $x = 1$, $y = 2$.

Ҷавоб: B (1; 2) (расми 5).



Расми 5

Супориш. 1) Координатаҳои миёнаҷойи порчаи PM-ро ёбед, агар P (– 4; 5) ва M (8; 3) бошад.

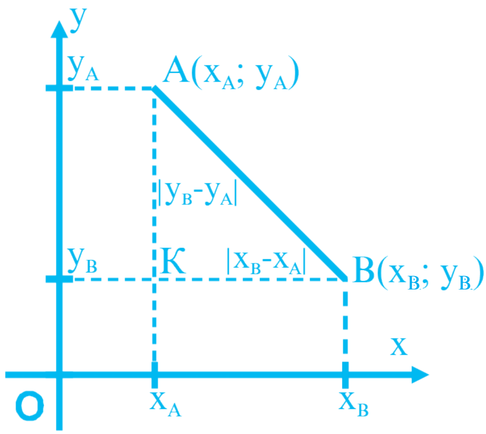
2) Қуллаҳои параллелограмми $ABCD$ нуқтаҳои A (1; 0), B (2; 3), C (3; 2) мебошанд. Координатаҳои қуллаи чорум D ва нуқтаи буриши диагоналҳоро ёбед.

Нишондод. Аввал координатаҳои миёнаҷойи порчаи AC-ро ёбед, ки он нуқтаи буриши диагоналҳо мебошад.

3) Координатаҳои нуқтаи A (x; y)-ро ёбед, агар M (–2; 3) миёначойи порчаи AB буда, B (6,–4) бошад.

§ 1.3. Масофаи байни ду нуқта

Дар расми 6 нуқтаҳои A (x_A, y_A) ва B ($x_В$, $y_В$) тасвир ёфтаанд. Барои ёфтани масофаи байни ин ду нуқта порчаи AB-ро сохта, аз нуқтаҳои A ва B ба тирҳои ордината ва абсисса перпендикуляр мегузаронем.



Расми 6

Секунчаи AKB, секунчаи росткунча мебошад. Катетҳояш $KB = |x_в - x_А|$ ва $AK = |y_в - y_А|$ мебошанд (расми 6).

Мувофиқи теоремаи Пифагор ҳосил мекунем:

$AB^2 = KB^2 + AK^2 = (x_в - x_А)^2 + (y_в - y_А)^2$.

Аз ин чо $AB^2 = (x_в - x_А)^2 + (y_в - y_А)^2$ ё

$AB = \sqrt{(x_В - x_А)^2 + (y_В - y_А)^2}$.

Ин формулаи масофаи байни ду нуқта мебошад.

Масъалаи 3. Дар тири ордината нуқтаеро ёбед, ки аз нуқтаҳои A (4; 3) ва B (2; 5) дар масофаи баробар воқеъ бошад.

Маълум: A (4; 3) ва B (2; 5),

$AC = BC$, C дар тири y (расми 7).

Матлуб: C (0, y).

Ҳал. 1) $AC^2 = (0 - 4)^2 + (y - 3)^2$.

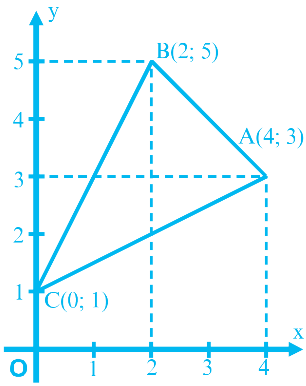
2) $BC^2 = (0 - 2)^2 + (y - 5)^2$.

3) Аз $AC^2 = BC^2$ мебарояд, ки

$(0 - 4)^2 + (y - 3)^2 = (0 - 2)^2 + (y - 5)^2$ ё

$16 + y^2 - 6y + 9 = 4 + y^2 - 10y + 25$, ё ки $10y - 6y = 4$. Аз ин ҷо $y = 1$.

Ҷавоб: $C\ (0;\ 1)$.



Расми 7

Супориш. 1) Нуқтаҳои $A\ (-3; -2)$, B $(-4; 2)$, C $(1; 3)$ қуллаҳои секунҷаи ABC мебошанд. Дарозии тарафҳои секунҷаи ABC-ро ёбед.

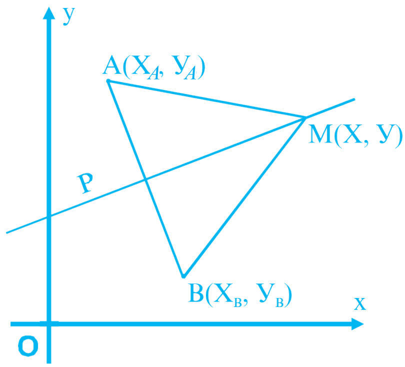
2) Дар супориши 1) медианаҳои секунҷаи ABC-ро ёбед.

3) Дар супориши 1) дарозии тарафҳои секунҷаеро ёбед, ки қуллаҳояш миёнаҷойи тарафҳои секунҷаи ABC бошад.

§ 1.4. Муодилаи хатти рост

Теорема. *Агар a, b, c -ададҳои ихтиёрӣ бошанд, он гоҳ муодилаи* $ax + by + c = 0$ *муодилаи хатти рост бо координатаҳои декартии x ва y мебошад.*

Исбот. Бигузор p – хатти рости ихтиёрӣ дар ҳамвории координатӣ бошад (расми 8). Хатти рости $AB \perp p$– ро месозем ва аз нуқтаи M, $MA = MB$-ро мегузаронем.



Расми 8

Бигузор $M\,(x;y)$, $A\,(x_A;\,y_A)$, $B\,(x_в;\,у_в)$ бошанд.
$AM^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2$ ва
$BM^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$.
Аз $AM^2 = BM^2$ ҳосил мекунем:
$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$,
$2(x_B - x_A)\,x + 2(y_B - y_A)\,y + (x_A{}^2 + y_A{}^2 - x_B{}^2 - y_B{}^2) = 0$.
$2(x_B - x_A) = a$, $2(y_B - y_A) = b$, $x_A{}^2 + y_A{}^2 - x_B{}^2 - y_B{}^2 = c$ ишора мекунем. Дар натиҷа, $ax + by + c = 0$ ҳосил мешавад, яъне хатти рости p дорои муодилаи $ax + by + c = 0$ будааст.

Масъалаи 4. Муодилаи хатти ростеро нависед, ки аз нуқтаҳои $A\,(-3;\,4)$ ва $B\,(2;\,0)$ мегузарад.

Маълум: $A\,(-3;\,4)$ ва $B\,(2,\,0)$.

Матлуб: $ax + by + c = 0$.

Ҳал. Агар хатти рости $ax + by + c = 0$ аз нуқтаҳои додашуда гузарад, координатаҳои ин нуқтаҳо муодиларо қонеъ менамоянд.

Аз ин ҷо

$$\begin{cases} a(-3) + b\cdot 4 + c = 0 \\ a\cdot 2 + b\cdot 0 + c = 0 \end{cases} \quad \text{ё} \quad \begin{cases} -3a + 4b + c = 0 \\ c = -2a \end{cases}$$

Қимати c-ро дар баробарии якум гузошта, хосил мекунем:

$$-3a + 4b - 2a = 0, \qquad 4b = 5a, \qquad b = \frac{5}{4}\cdot a\,.$$

Қиматҳои с = – 2а ва $b = \frac{5}{4} \cdot a$ -ро дар муодилаи $ax + by + c = 0$ гузошта, меёбем:

$ax + \frac{5}{4} \cdot ay - 2a = 0$ ё $4x + 5y - 8 = 0$.

Ҷавоб: $4x + 5y - 8 = 0$.

Супориш. 1) Оё хатти рости $x + 2y + 5 = 0$ аз нуқтаҳои A (–3; –1), B (–7; 1), C (1; –3) ва D (2; 4) мегузарад?

2) Муодилаи хатти рости аз нуқтаҳои A (0, 3) ва B (2, 4) гузарандаро нависед.

§ 1.5. Координатаҳои нуқтаи буриши ду хатти рост

Бигузор ду хатти рости $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ва $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ дода шуда бошанд ва нуқтаи A (x; y), нуқтаи буриши онҳо бошад. Азбаски ҳар ду хатти рост аз нуқтаи A (x; y) мегузаранд, координатаҳои ин нуқта ҳар ду муодиларо қонеъ мекунонад. Ҳар ду муодиларо ҳамчун система ҳал карда, координатаҳои буришро меёбанд.

Масъалаи 5. Нуқтаи буриши хатҳои рости $4x - y - 3 = 0$ ва $2x + y - 9 = 0$-ро ёбед.

Маълум: $4x - y - 3 = 0$ ва $2x + y - 9 = 0$.

Матлуб: А (x; y) - нуқтаи буриш.

Ҳал. $\begin{cases} 4x - y = 3, \\ 2x + y = 9. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x = 12, \\ 2x + y = 9. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ 2 \cdot 2 + y = 9. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 5. \end{cases}$

Ҷавоб: A (2; 5).

Масъалаи 6. Исбот кунед, ки хатҳои рости $y = kx + b_1$ ва $y = kx + b_2$ дар ҳолати $b_1 \neq b_2$ будан параллеланд.

Исбот. Бигузор нуқтаи М (x_1; y_1) нуқтаи буриши хатҳои рост бошад, он гоҳ:

$\begin{cases} y_1 = kx_1 + b_1, \\ y_1 = kx_1 + b_2 \end{cases}$ ва $\begin{cases} b_1 = y_1 - kx_1, \\ b_2 = y_1 - kx_1, \end{cases}$ аз ин ҷо $b_1 = b_2$.

Аз ин бармеояд, ки фарзи мо нодуруст буда, хатҳои рост параллеланд.

Қайд. Барои фаҳмидани он ки хатҳои рости $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ва $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ параллел мешаванд ё не, ҷой доштани шарти $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ -ро санҷидан лозим аст.

Масъалаи 7. Оё хатҳои рости $2x + 3y + 5 = 0$ ва $4x + 6y + + 8 = 0$ параллеланд?

Ҳал. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ва $\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Аз ин ҷо, ҳар ду хатти рост параллеланд.

Супориш. 1) Нуқтаҳои буриши хатти рости $3x + 2y – 5 = 0$-ро бо хатҳои рости $4x + 5y – 9 = 0$ ва $2x + 5y + 4 = 0$ ёбед.

2) Кадоме аз ҷуфти хатҳои рости додашуда параллеланд:

$10x + 4y + 13 = 0,$ $\quad$ $2x + 3y + 8 = 0,$

$– 3x + 4y + 8 = 0,$ $\quad$ $–5x – 2y + 8 = 0.$

Масъалаҳои тадқиқотӣ

1. Ҳолатҳои ҷойгиршавии хатти рости $ax + by + c= 0$-ро нисбат ба системаи координатаҳо муайян намоед.

Низоми тадқиқот.

1) Ҳолати $a = 0$ ва $b \neq 0$.
2) Ҳолати $b = 0$ ва $a \neq 0$.
3) Ҳолати $c = 0$.
4) Шарҳи се ҳолати аввал бо мисолҳои мушаххас.

2. Ҳолатҳои ҷойгиршавии ду хатти ростро тадқиқ намоед.

Низоми тадқиқот.

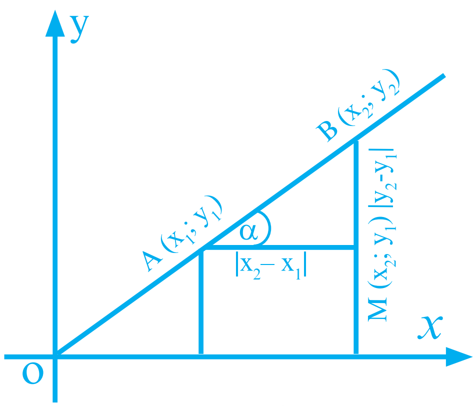
1) Ҳолати ҳал доштани системаи муодилаҳо.
2) Ҳолати ҳал надоштани системаи муодилаҳо.
3) Ҳолати ҳалли бешумор доштани системаи муодилаҳо.
4) Тасвири хатҳои рост барои се ҳолати аввал ба воситаи мисолҳои мушаххас.

§ 1.6. Коэффитсиенти кунҷии хатти рост

Хатти рости $ax + by + c = 0$-ро дар ҳолати $b \neq 0$ будан, дар шакли $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ менависем. Агар $k = -\frac{a}{b}$ ва $p = -\frac{c}{b}$ бошад, ҳосил мекунем: $y = kx + p$.

Маънои геометрии коэффитсиент (k)-ро тадқиқ менамоем. Бигузор хатти рости у $= kx + b$ аз нуқтаҳои А $(x_1; y_1)$ ва В $(x_2; y_2)$ гузарад. Координатаҳоро дар муодила гузошта, ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + p \\ y_2 = kx_2 + p \end{cases} \rightarrow y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \text{ ё } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Расми 9

Дар секунҷаи AMB (расми 9) $\text{tg}\alpha = \frac{BM}{AM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k.$

Аз ин ҷо $k = \text{tg}\alpha$,

α – кунҷи байни хатти рост ва равиши мусбати тири абсисса мебошад.

k - коэффитсиенти кунҷии хатти рости $y = kx + p$ ном дорад.

Масъалаи 8. Коэффитсиенти кунҷии хатти рости $2x - 2y + 7 = 0$-ро ёфта, графикашро созед.

Маълум: $2x - 2y + 7 = 0$.

Матлуб: k ва график.

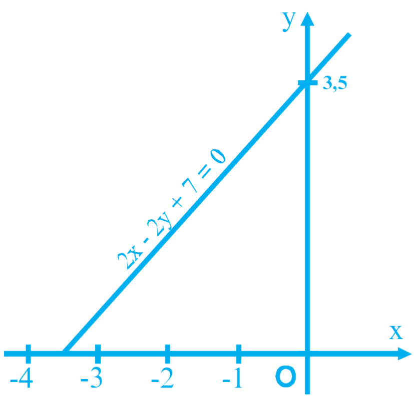
Ҳал. Муодилаи $2x - 2y + 7 = 0$-ро узв ба узв ба 2 тақсим мекунем:

$x - y + 3,5 = 0,$

$y = x + 3,5.$

Аз ин ҷо $k = 1$ ё $\text{tg}\alpha = k = 1$, $\alpha = 45°$.

Барои сохтани худи хатти рост дар муодилаи $y = x + 3,5;$ $x = 0$ гузошта, $y = 3,5$-ро ҳосил мекунем. Акнун аз нуқтаи (0; 3,5) дар тахти кунҷи $\alpha = 45°$ хатти рост мегузаронем (расми 10).



Расми 10

Супориш. 1) Хатти рости $3x - \sqrt{3y} + 6 = 0$ -ро созед.

2) Агар хатти рост аз нуқтаҳои А (4; 5) ва В (8; 10) гузарад, коэффитсиенти кунҷиро ёбед ва муодилаи хатти ростро тартиб диҳед.

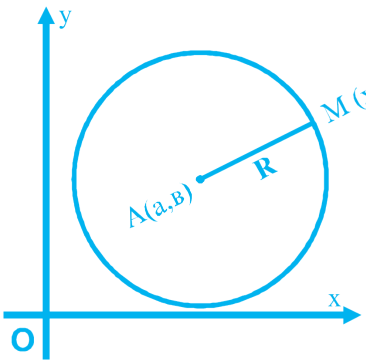
3) Коэффитсиенти кунҷии хатти рост $\text{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ буда, он аз нуқтаи М (2; 0) мегузарад. Хатти ростро созед ва муодилаашро тартиб диҳед.

§ 1.7. Муодилаи давра

Масъала. Дар расми 11 давра бо маркази А (a;b) ва яке аз нуқтаҳояш М (x;у) дода шудааст. Агар радиуси давра R бошад, муодилаи давра тартиб дода шавад.

Маълум: A ($a;b$) - марказ, R - радиус, M ($x;y$) - нуқтаи давра.

Матлуб: Муодилаи давраи А (R)-ро тартиб диҳед.



Расми 11

Ҳал. Аз расми 11 маълум аст, ки $AM=R$ мебошад. Аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$AM^2 = R^2$ ё $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Инак, муодилаи $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ муодилаи давраи марказаш $A\ (a;\ b)$ бо радиуси R мебошад. Агар маркази давра ибтидои координатаҳо (нуқтаи O (0; 0)) бошад, муодила шакли зайлро мегирад:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Масъалаи 9. Муодилаи давраи марказаш $A\ (3;\ 4)$-ро, ки аз нуқтаи M (6; 2) мегузарад, тартиб диҳед.

Ҳал. Дар муодилаи $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, $a = 3$, $b = 4$, $x = 6$ ва $y = 8$ мегузорем:

$$(6 - 3)^2 + (8 - 4)^2 = R^2,$$
$$R^2 = 9 + 16 = 25,\ R = 5.$$

Аз ин ҷо $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ муодилаи давраи матлуб мебошад.

Масъалаи 10. Муодилаи $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ муодилаи давра мебошад. Радиус ва маркази ин давраро ёбед.

Ҳал. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) - 4 - 1 - 20 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2 - 25 = 0$.

Аз ин ҷо $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$, $a = -2$, $b = 1$, $R = 5$.

Нуқтаи A $(-2;1)$ маркази давра, радиусаш $R = 5$ аст.

Супориш. 1) Оё давраи $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ аз нуқтаҳои M (5; 5), P (-1; -3), D (4; 3) мегузарад?

2) Муодилаи давраи марказаш *(5, 6)* ва аз нуқтаи (0, 18) гузарандаро тартиб диҳед.

3) Марказ ва радиуси давраи муодилааш $x^2+y^2-6x-4y-12 = 0$-ро ёбед ва давраро созед.

Масъалаи тадқиқотӣ

Ҳолатҳои ҷойгиршавии хатти рост ва давраро тадқиқ намоед.

Низоми тадқиқот

1) Хатти рост ва давра якдигарро мебуранд.

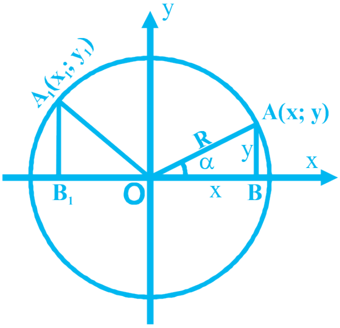
2) Хатти рост расандаи давра мебошад.

3) Хатти рост давраро намебурад.

4) Ба воситаи расмҳо ва мисолҳои мушаххас нишон додани ҳолатҳои ҷойгиршавии хатти рост ва давра.

§ 1.8. Функсияҳои тригонометрӣ барои кунҷҳои аз 0° то 180°

Давраи марказаш дар ибтидои системаи координатаҳо O (0; 0) ва радиусаш R-ро месозем (расми 12). Аз моили $OA=R$, перпендикуляри AB = y ва проексияи $OB = x$ истифода бурда меёбем:



Расми 12

$$\cos\alpha = \frac{x}{R},\ \sin\alpha = \frac{y}{R},\ tg\alpha = \frac{y}{x} \text{ ва } ctg\alpha = \frac{x}{R}.$$

Агар нуқтаи A вазъияти A_1 (x_1; y_1)-ро ишғол намояд, ба ҷойи α кунҷи 180° – α гирифта мешавад.

Дар ин ҳолат, $\cos(180^\circ-\alpha) = \frac{-OB}{R} = -\frac{x}{R} = -\cos\alpha$, яъне

1) $\cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha$;

2) $\sin(180^\circ-\alpha) = \frac{A_1B_1}{R} = \frac{AB}{R} = \frac{y}{R} = \sin\alpha,\ \ \sin(180^\circ-\alpha) = \sin\alpha$;

3) $tg(180^\circ-\alpha) = \frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{\cos(180^\circ-\alpha)} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -tg\alpha$,

$tg(180^\circ-\alpha) = -tg\alpha$;

4) $ctg(180^\circ-\alpha) = \frac{1}{tg(180^\circ-\alpha)} = -\frac{1}{tg\alpha} = -ctg\alpha$,

$ctg(180^\circ-\alpha) = -ctg\alpha$.

Масъалаи 11. Қиматҳои функсияҳои тригонометриро барои кунҷи 120° муайян намоед.

Ҳал. $1)\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$2)\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2};$

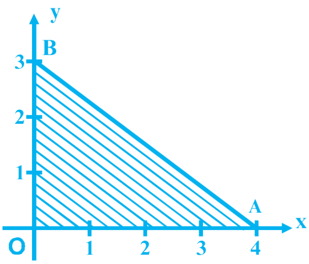
$3)\mathrm{tg}120^\circ = tg(180^\circ - 60^\circ) = -tg 60^\circ = -\sqrt{3};$

$4)\mathrm{ctg}120^\circ = ctg(180^\circ - 60^\circ) = -ctg 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

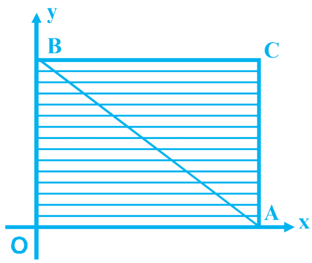
Супориш. 1) Қиматҳои функсияҳои тригонометриро барои кунҷи 150° ёбед. 2) Қиматҳои функсияҳои тригонометриро барои кунҷи 135° муайян намоед.

Масъалаҳо

1. Координатаҳои қуллаҳои секунҷа ва росткунҷаро дар расмҳои 13 ва 14 ёбед, агар: а) $OA = 4$, $OB = 3$; б) $OA = a$, $OB = b$ бошад. Дарозии порчаи АВ ва масоҳати фигураҳоро ҳисоб кунед.

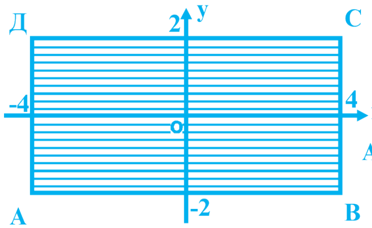


Расми 13.

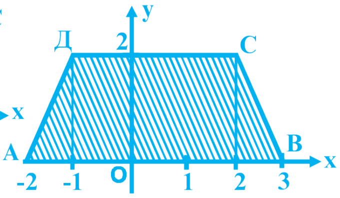


Расми 14.

2. Дар расмҳои 15 ва 16 координатаҳои қуллаҳои фигураҳои тасвиршударо ёфта, масоҳати онҳоро ҳисоб кунед.

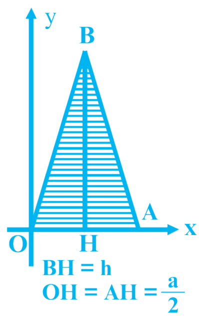


Расми 15.

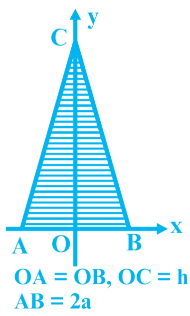


Расми 16.

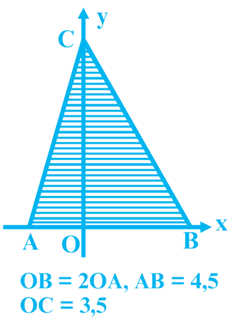
3. Координатаҳои қуллаҳои фигураҳои дар расмҳои 17, 18, 19 тасвиршударо пайдо карда, периметр ва масоҳати онҳоро ёбед.



Расми 17.

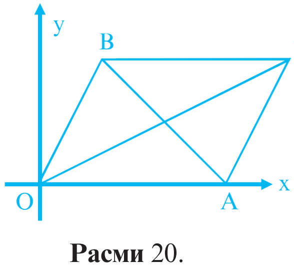


Расми 18.

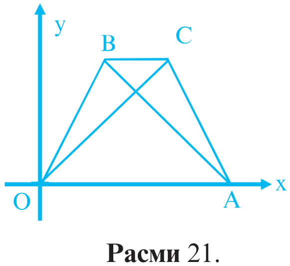


Расми 19.

4. Дар расмҳои 20 ва 21 координатаҳои қуллаҳои параллелограмм ва трапетсияро ёбед. Дарозии диагоналҳо, периметр ва масоҳати фигураҳоро ҳисоб намоед, агар $OA=a$, $OB = b$ ва $OC = d$ бошад.



Расми 20.



Расми 21.

5. Периметр ва масоҳати секунҷаи *ABC*-ро ёбед, агар: *A* (4;0), *B* (0; -5), C (-3,0) бошад.

6. Исбот кунед, ки нуқтаи D (2; 2) аз нуқтаҳои A (6; 1), B (5; -6) ва C (-1; 2) дар дурии баробар воқеъ аст.

7. Исбот кунед, ки секунҷаи ABC баробарпаҳлу мебошад. Масоҳати ин секунҷаро ҳисоб кунед, агар: а) A (0; 1), B (1; -4), C (5; 2);

б) A (-4; 1), B (-2; 4), C (0; 1) бошад.

8. Нуқтаи C миёнаҷойи порчаи AB мебошад. Ҷадвали зеринро дар дафтаратон кашида, ҷойҳои холиро пур кунед.

A	(3; 5)		(0; 2)	(1; 3)	(a;b)
B	(7; 8)	(-3; 5)			
C		(1:4)	(3; -5)	(0; 0)	(0; 0)

9. Исбот кунед, ки чоркунҷаи ABCD росткунҷа аст, масоҳат ва диагоналҳояшро ёбед, агар: *A) A (4; 1), B (3; 5), C (-1; 4), D (0; 0); б) A (-3; -1), B (1; -1), C (1; -3), D (-3; -3)* бошад.

10. Муодилаи хатти рости аз нуқтаҳои A (4; 5) ва B (3; -2) гузарандаро тартиб диҳед ва графики онро созед.

11. Муодилаи хатти рости аз нуқтаҳои *O* (0; 0) ва M (4; 4) гузарандаро тартиб дода, хатти ростро созед.

12. Оё хатти рости $2x + 5y - 17 = 0$ аз нуқтаҳои A (1; 3), B (6; 1), C (2; 2) мегузарад?

13. Нуқтаҳои буриши хатти рости $2x + 5y - 10 = 0$-ро бо тирҳои координата ёбед.

14. Нуқтаҳои буриши хатҳои рости: а) $4x + 3y - 6 =0$ ва $2x + y - 4 = 0$; б) $2x + 6y - 8 = 0$ ва $5x + 7y = 12$-ро ёбед.

15. Хатҳои ростеро тасвир кунед, ки бо муодилаҳои: а) $y = 3$, б) $x = 2$, в) $y = -4$, г) $x = 7$ дода шуда бошанд.

16. Коэффитсиенти кунҷии хатти ростро ёбед, агар:

а) $3x + 6y - 12 = 0$, б) $10x + 2y + 7 = 0$, в) $\sqrt{3x} - \sqrt{3y} + 3 = 0$ бошад.

17. Коэффитсиенти кунҷии хатти ростеро ёбед, ки аз нуқтаҳои а) М (5; 6) ва Р (7; 8); б) М (2; -6) ва Р (-3; -4) мегузарад.

18. Давраро аз рӯйи муодилаи додашудааш созед:

а) $x^2 + y^2 = 9$, б) $(x + 1)^2 + (y – 2)^2 = 4$, в) $(x – 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$.

19. Нуқтаҳои А (3; -4), В (1; 0), С (0; 5), *O* (0; 0), Е (0; 1) дар кадом давраи бо муодилаҳои зерин додашуда мехобанд?

а) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$, б) $x^2+y^2 = 25$, в) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

20. Муодилаи давраи марказаш ибтидои координата ва радиусаш $r = 2{,}5$-ро нависед.

21. Давраи $x^2 + y^2 = 25$ тирҳои координатаро дар кадом нуқтаҳо мебурад?

22. Муодилаи давраи марказаш нуқтаи А ва радиусаш r-ро нависед, агар: а) *A* (0; 5), r=3; б) *A* (-1; 2), r=2; в) *A* (-3; -7), r=0,5; г) *A* (4; -3), r=10 бошад.

23. Муодилаи давраи марказаш ибтидои координатаҳо ва аз нуқтаи *B* (-1; 3) гузарандаро тартиб диҳед.

24. Муодилаи давраи марказаш А (0; 6) ва аз нуқтаи М (-3; 2) гузарандаро нависед.

25. Муодилаи давраи диаметраш *AB*-ро нависед, агар: а) *A* (-3; 5), *B* (7; -3), б) *A* (4; 3), *B* (2; -1) бошад.

26. Координатаҳои марказ ва радиуси давраро ёбед, агар:

а) $(x–1)^2+(y–2)^2=4$; б) $(x+3)^2+(y-0{,}5)^2=3$;

в) $x^2 +y^2 - 2x - 2y = 7$; г) $x^2 - 2x +y2 + 4y = 11$ бошад.

27. Вазъияти ҷойгиршавии хатти рост ва давраро аз муодилаҳои зерин муайян кунед:

а) $y = 2$, $x^2 +y^2 = 9$; г) $x = 0$, $(x+1)^2+ (y–3)^2 = 26$;

б) $y = 2$, $(x – 1)^2 + y^2 = 4$; д) $y = 3$, $x^2+y^2 = 9$;

в) $x = 4$, $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 1$; е) $x = 3$, $x^2+y^2 = 1$.

28. Нуқтаҳои буриши хатҳои рост ва давраро ёбед, агар:

а) $x^2+y^2 = 25$, $2x+3y–18=0$;

б) $(x–2)^2 + (y–4)^2 = 4$, $3x+5y=32$ бошад.

29. Нуқтаҳои буриши давраҳои бо муодилаҳои зерин додашударо ёбед: а) $(5-x)^2+(4+y)^2=49$, $(4-x)^2+(y-2)^2 = 2$;

б) $(x-5)^2+(y+7)^2 =1$, $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 =10$.

30. Исбот кунед: секунҷае, ки қуллаҳояш дар нуқтаҳои A (3; 0), B (0; 3), C (-3; 0) мавҷуд аст, ба давраи $x^2+y^2= 9$ дарункашида мебошад. Масоҳати секунҷаи ABC-ро ёбед.

31. Ифодаҳои зеринро сода намоед:

а) $\dfrac{\cos(90^\circ-\alpha)+\sin(180^\circ-\alpha)}{2\cos(180^\circ-\alpha)}$;

б) $\sin\alpha - \cos(90^\circ-\alpha)-\cos\alpha - \cos(180^\circ - \alpha)$;

в) $\sin40^\circ\cdot\cos50^\circ+\sin50^0\cdot\cos40^\circ$.

32. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\dfrac{\sin30^\circ+\sin150^\circ}{\cos120^\circ-\cos60^\circ}$; б) $\dfrac{\mathrm{tg}135^o\cdot tg45^o-ctg135^o}{\cos60^\circ\cdot\cos150^\circ}$;

в) $\cos70^0\cdot\sin20^0+\cos20^0\cdot\sin70^0+\sin60^0\cdot\sin120^0-\cos60^0\cdot\cos120^0$.

Савол ва супоришҳо барои санҷиш

1. Таърифи ҳамвории координатиро баён намоед.
2. Координатаҳои миёнаҷойи порчаро бо кадом формулаҳо муайян менамоянд?
3. Формулаи масофаи байни ду нуқтаро нависед.
4. Муодилаи давраи аз ибтидои координатаҳо гузарандаро нависед.
5. Муодилаи давраи марказаш $A(a;b)$-ро бо радиуси R нависед.
6. Муодилаи умумии хатти ростро нависед.
7. Муодилаи хатти ростеро нависед, ки аз нуқтаҳои (a; 0) ва (0; b) мегузарад.
8. Хатти рости $y=кx$ аз кадом чорякҳо мегузарад?
9. Коэффитсиенти кунҷии хатти рости $ax + by + c = 0$-ро ёбед.
10. Нуқтаи буриши ду хатти ростро чӣ тавр меёбанд?
11. Вазъияти ҷойгиршавии ду хатти ростро нишон диҳед.
12. Ҳолатҳои ҷойгиршавии ду давраро тасвир намоед.

13. Ҳолатҳои ҷойгиршавии хатти рост ва давраро нишон диҳед.

14. Таърифи функсияҳои тригонометриро барои кунҷҳои аз 0° то 180° баён намоед.

15. Ба чӣ баробар будани $\cos(180°-\alpha)$, $\sin(180°-\alpha)$ ва $tg(180°-\alpha)$-ро нишон диҳед.

16. Муодилаи хатти ростеро нависед, ки аз ибтидои координатаҳо гузашта, дар ҷорякҳои II ва IV ҷойгир аст.

ФАСЛИ II. ВЕКТОРҲО

§ 2.1. Мафҳуми вектор

1. Мафҳуми вектор. Қимати мутлақ ва самти вектор

Шумо то кунун бо бузургиҳои дарозӣ, кунҷ, масоҳат ва ғайра шинос шудед. Бузургиҳои номбурда фақат бо қимати ададияшон ифода карда мешаванд.

Дар физика бузургии масса ҳам бо қимати ададияш ифода меёбад. Дар амалияи кору зиндагӣ бо бузургиҳое дучор гаштан мумкин аст, ки ғайр аз қимати ададӣ боз самти муайян доранд. Дар физика бузургиҳои суръат ва қувва ғайр аз қимати ададӣ боз самти муайян доранд.

Бузургиҳое, ки бо қимати ададӣ ва самташон муайян карда мешаванд, бузургиҳои векторӣ ном доранд.

Таъриф. *Порчаи самтдорро вектор меноманд.*

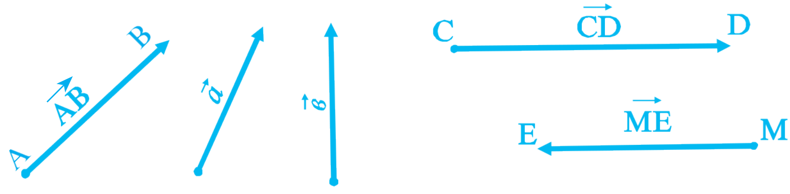
Калимаи «*вектор*» аз забони юнонӣ гирифта шуда, маънояш «кашидан» мебошад.

Векторро бо як ҳарфи хурди алифбои юнонии дар болояш хатчаи самтдор гузошташуда ё бо ду ҳарфи калони дар болояшон хатчаи самтдор гузошташуда (яке ибтидо, дигаре интиҳои вектор аст), ишора мекунанд.

Масалан: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, ё $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EM}$ ва ғайра.

Навишти «$\vec{a}$», - «вектори *a*» хонда мешавад.

Векторро ба шакли порчае, ки дар охираш тирча гузошта шудааст, тасвир менамоянд (расми 22).



Расми 22

Таъриф. *Бузургии мутлақ (ё модули вектор) гуфта, да-*

розии порчаеро меноманд, ки векторро тасвир менамояд. Бузургии мутлақи вектори $\vec{a}$, бо $|\vec{a}|$ ишора карда мешавад.

Таъриф. *Вектореро, ки бузургии мутлақаш ба сифр баробар аст, вектори сифрӣ меноманд.*

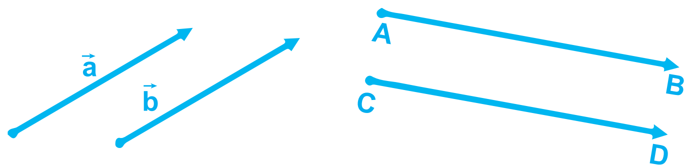
Дар векторҳои *сифрӣ* ибтидо ва интиҳои порча якҷо мешаванд. Навиштҳои $\vec{O}$, $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ маънои вектори *сифриро* доранд.

2. Ҳолатҳои ҷойгиршавии ду вектор

Ду вектор ба монанди нурҳо се ҳолати ҷойгиршавӣ доранд.

1) Векторҳои ҳамсамт.

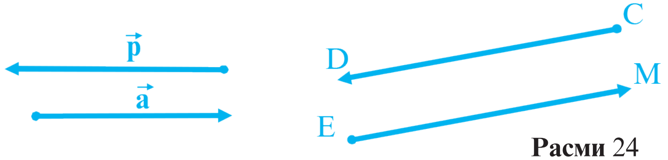
Векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ (дар расми 23) ҳамсамтанд.



Расми 23

2) Векторҳои муқобилсамт.

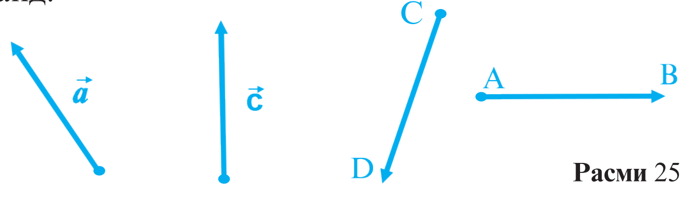
Дар расми 24 векторҳои $\vec{p}$ ва $\vec{a}$, $\overrightarrow{EM}$ ва $\overrightarrow{CD}$ муқобилсамт мебошанд.



Расми 24

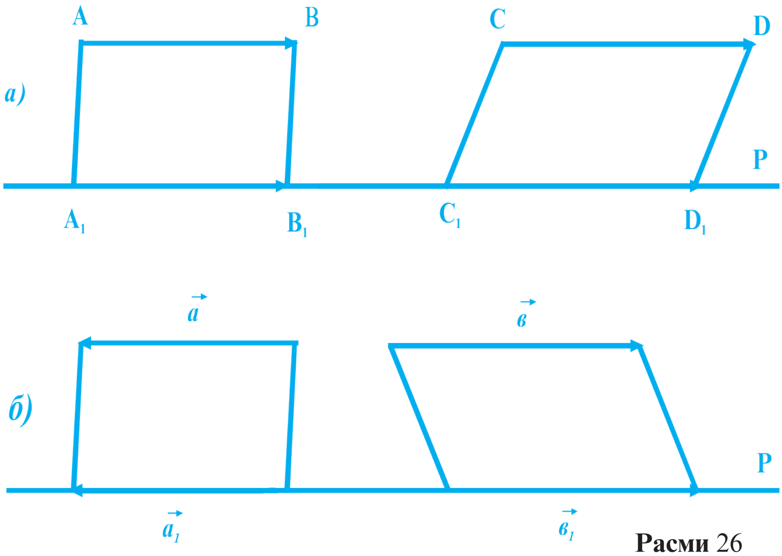
3) Векторҳои гуногунсамт.

Дар расми 25 векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{c}$, $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ гуногунсамт мебошанд.



Расми 25

Векторҳои ҳамсамт ва муқобилсамтро ба як хатти рост кӯчонидан мумкин аст (расми 26 а, б).



Расми 26

Таъриф. *Векторҳои ҳамсамт ва муқобилсамтро векторҳои коллинеарӣ меноманд.*

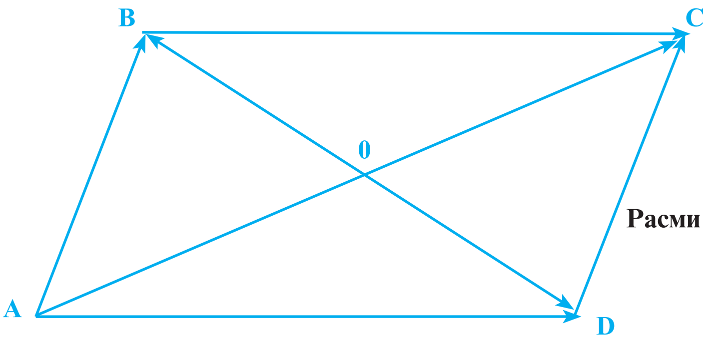
Калимаи «коллинеарӣ» дар забони тоҷикӣ маънои «ҳамхат»-ро дорад. Ба таври дигар, векторҳоеро, ки ба як хатти рост кӯчонидан мумкин аст, векторҳои ҳамхат ё коллинеарӣ меноманд.

3. Векторҳои баробар. Векторҳои муқобил

Таъриф. *Векторҳое, ки бузургии мутлақи баробар дошта, ҳамсамт мебошанд, векторҳои баробар номида мешаванд.*

Ба таври дигар, ду вектори дорои дарозиҳои баробар ва самтҳои ҳамсояро баробар меноманд. Агар векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ баробар бошанд, чунин менависанд: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Масъалаи 1. Дар расми 27 параллелограмми ABCD тасвир ёфтааст. Кадом векторҳо баробаранд?



Расми 27

Ҳал. Дар параллелограмми ABCD векторҳои зерин мавҷуданд:

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{CC}$, $\overrightarrow{DD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$,
$\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OO}$, ҳамагӣ 25 вектор.

Аз онҳо векторҳои зерин баробаранд:

$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{DD} = \overrightarrow{OO}$;

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$;

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$;

$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}$;

$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}$.

Супориши 1. Дар расми 28 трапетсияи ABCD тасвир ёфтааст. Векторҳои баробарро нависед. Кадом векторҳо ҳамсамт ва кадом векторҳо коллинеариянд?

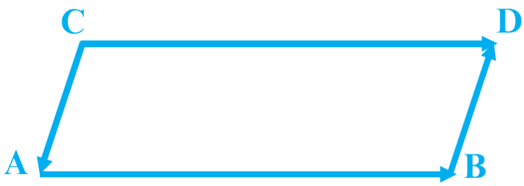
Супориши 2. Дар расми 27 кадом векторҳо: а) ҳамсамт, б) муқобилсамт, в) гуногунсамт, д) коллинеарӣ мебошанд?

Таъриф. *Ду векторе, ки бузургии мутлақи баробар (дарозии баробар) ва самти муқобил доранд, векторҳои муқобил номида мешаванд.*

Дар расми 27, векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD}$ ва $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA}$ ва $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ ва $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}$ ва $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}$ ва $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OA}$ ва $\overrightarrow{OC}$,

$\overrightarrow{OB}$ ва $\overrightarrow{OD}$ ва ғайра векторҳои муқобил мебошанд. Навишти $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$-ро чунин мехонанд: «Векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{BA}$ муқобиланд». Бояд қайд кард, ки ба воситаи параллелкӯчонӣ векторҳои баробарро якҷо кардан мумкин аст. Дар расми 29 векторҳои $\overrightarrow{CD}$ ва $\overrightarrow{AB}$ баробаранд. Параллелкӯчонии $\overrightarrow{CA}$ онҳоро якҷо менамояд.

Супориши 3. Дар расми 27 кадом параллелкӯчонӣ векторҳои: а) $\overrightarrow{AD}$ ва $\overrightarrow{BC}$, б) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{DC}$-ро якҷо менамояд?



Расми 29

4. Сохтани вектори ба вектори додашуда баробар

Масъалаи 2. Вектори $\vec{a}$ ва нуқтаи O дода шудаанд. Аз нуқтаи додашуда вектори $\overrightarrow{OA}$ ба вектори $\vec{a}$ баробарро созед.

Маълум: $\vec{a}$ ва нуқтаи O.

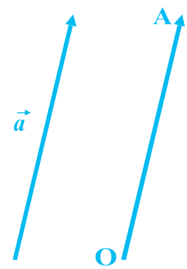
Матлуб: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

Низоми сохтан:

1) Тасвири $\vec{a}$ ва нуқтаи O.

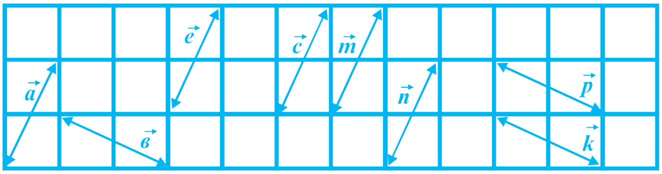
2) Сохтани нури OA-и ба вектори $\vec{a}$ ҳамсамт.

3) Сохтани $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.



Расми 30

Супориш. 1) Ду вектори гуногунсамти $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ дода шудаанд. Аз нуқтаи маълуми A векторҳои ба онҳо баробарро созед. 2) Кадом векторҳои расми 31 ҳамсамт, кадомашон баробар ва кадомашон муқобил мебошанд.



Расми 31

Масъалаҳои амалӣ

1. Дар хатти рост се нуқтаи A, B, C-ро тавре гузоред, ки нуқтаи A дар байни нуктаҳои B ва C хобад. Кадом векторҳо ҳамсамт ва кадом векторҳо муқобилсамт мебошанд? Ҳамагӣ чанд вектор ҳосил шуд?

2. Дар секунҷаи ABC кадом векторҳо мавҷуданд, агар AA_1, BB_1 ва CC_1 медианаҳо бошанд?

3. Секунҷаи ABC-ро созед, векторҳои AB, AC ва BC -ро ба ягон нуқтаи M кӯчонед.

4. Векторҳои $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ва $\overrightarrow{EM}$ -ро тарзе созед, ки: 1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ва $\overrightarrow{EM}$ коллинеарӣ бошанд. 2) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ва $\overrightarrow{EM}$ ғайриколлинеарӣ бошанд. 3) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ коллинеарӣ буда, $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{EM}$ ғайриколлинеарӣ бошанд.

5. Шашкунҷаи мунтазамро созед. Дар он кадом векторҳо баробаранд?

6. Ду вектори $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ -ро тавре созед, ки: а) дарозии баробар дошта, ҳамсамт бошанд; б) дарозии баробар дошта, муқобилсамт бошанд.

7. Исбот кунед, ки вектори дилхоҳ ба худаш баробар аст: $\vec{a} = \vec{a}$.

8. Исбот кунед, ки агар O миёнаҷойи порчаи AB бошад, он гоҳ

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{AB}$ мешавад.

9. Кадоме аз бузургиҳои зерин бузургиҳои векторианд: суръат, масса, суръатнокӣ (шитоб), вақт, ҳарорат, ҳаҷм, кор, қувва, масофа.

10. Дар квадрат: а) ду тарафи ҳамсоя; б) ду тарафи муқобил; в) ду диагонал векторҳои баробар шуда метавонанд?

11. Дар ромб: а) ду тарафи ҳамсоя; б) ду тарафи муқобил; в) ду диагонал векторҳои муқобил шуда метавонанд?

12. Дар давра ду диаметри перпендикулярро созед. Дар расми ҳосилшуда чанд вектори баробар, муқобил ва перпендикуляр мавҷуд аст?

§ 2.2. Амалҳо бо векторҳо

1. Координатаҳои вектор

Бигузор нуқтаи $A(X_A;Y_A)$ ибтидо ва нуқтаи $B(X_B;Y_B)$ интиҳои вектори $\overrightarrow{AB}$ бошад. Вектори $\overrightarrow{AB}$ дорои координатаҳои X_B-X_A ва Y_B-Y_A буда, чунин навишта мешавад:

$$\overrightarrow{AB}=(X_B-X_A;\ Y_B-Y_A).$$

Вектори сифрӣ бо координатаҳояш чунин навишта мешавад:

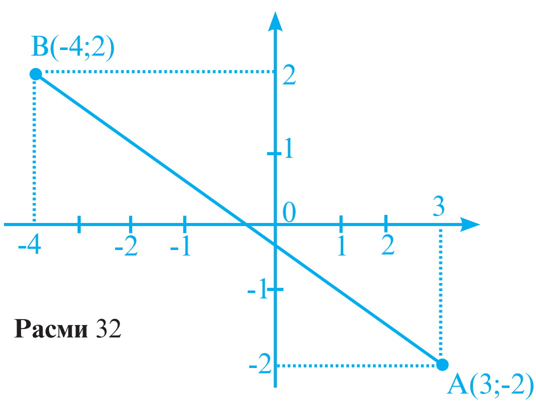
$$\vec{O}=(0;0).$$

Дарозии вектори $\overrightarrow{AB}$ ё бузургии мутлақи вектори $\overrightarrow{AB}$ баробар аст ба

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(X_B-X_A)^2+(Y_B-Y_A)^2}.$$

Масъалаи 1. Агар A (3; - 2) ва B (-4; 2) бошад, координатаҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $|\overrightarrow{AB}|$-ро ёбед.

Маълум: A(3;-2) ва B (-4;2) (расми 32).



Расми 32

Ҳал: $\overrightarrow{AB} = (-4-3; 2+2) = (-7; 4)$; $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-7)^2 + 4^2} = \sqrt{65}.$

Супориш:1) Координатаҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $|\overrightarrow{AB}|$ -ро ёбед, агар а) A (4;5), B (8;8); б) A (2;8), B(-1;12) ва В) A (3;4) B(15;9) бошад.

2) Вектори $\overline{OM}$ ва бузургии мутлақи онро ёфта, дар системаи координатаҳо тасвир намоед:

а O (0;0) ва M(3;4); б) O (0;0) ва M (6;8)

в) O (0;0) ва M(-3;4); г) O (0;0) ва M(-3;-4).

Теорема. *Векторҳои баробар координатаҳои мувофиқи баробар доранд.* Исботи ин теоремаро ба воситаи параллелкӯчонӣ иҷро намоед.

Инак, агар $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ва $\vec{b} = (b_1; b_2)$ буда, $\vec{a} = \vec{b}$ бошад, он гоҳ $a_1 = b_1$ ва $a_2 = b_2$ мешавад.

Масъалаи 2. Се нуқтаи A (1;1), B(-1;0), C (0; 1) дода шудааст.

Нуқтаи D(x; y)-ро тарзе ёбед, ки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ шавад.

Маълум: A (1;1), B(-1; 0), C (0;1), $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Матлуб: D ($x;y$).

Ҳал. $\overrightarrow{AB} = (-1-1; 0-1) = (-2; -1); \overrightarrow{CD} = (x-0; y-1) = (x; y-1)$.

Аз баробарии ин векторҳо бармеояд, ки

$x = -2; y-1 = -1; y = 0.$

Ҷавоб: D(-2;0).

2) Дар масъалаи 2 нуқтаи D (x; y)-ро тарзе ёбед, ки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$ бошад.

2. Ҷамъи векторҳо

Таъриф. Суммаи векторҳои $\vec{a} = (x_A; y_A)$ ва $\vec{b} = (x_B; y_B)$ гуфта, чунин вектори $\vec{c}$-ро меноманд, ки координатаҳояш чунинанд:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (x_A; y_A) + (x_B; y_B) = (x_A + x_B; y_A + y_B).$$

Дар геометрия се тарзи ҷамъи векторҳо мавҷуд аст: 1) ҷамъи векторҳо ба воситаи кординатаҳо; 2) қоидаи секунҷагии ҷамъи векторҳо; 3) қоидаи параллелограмм.

а) Қоидаи секунҷагии ҷамъи векторҳо

Масъалаи 3. Суммаи векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$-ро созед.

Маълум: $\vec{a}$ ва $\vec{b}$.

Матлуб: $\vec{a}$ ва $\vec{b}$.

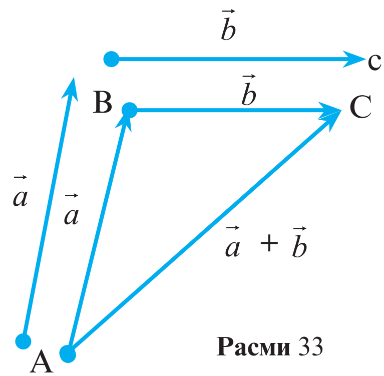
Низоми сохтан:

1) Интихоби векторҳои $\vec{a}, \vec{b}$ ва нуктаи A (расми 33).

2) Сохтани $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

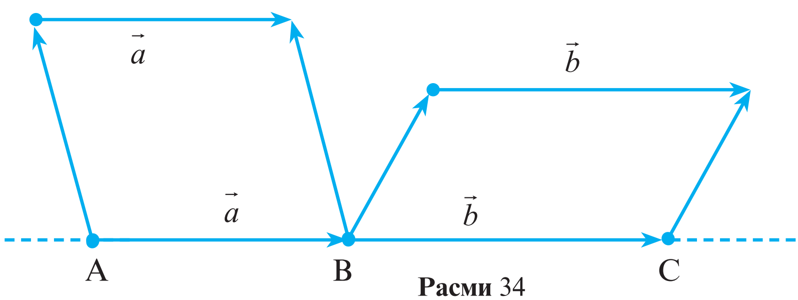
3) Сохтани $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

4) Сохтани $\overrightarrow{AC}$.



Расми 33

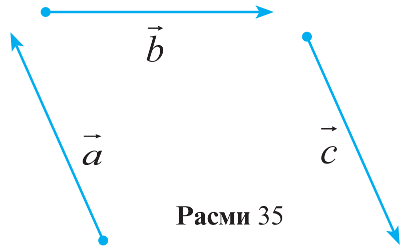
Матлуб. $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ ё $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Агар векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ҳамсамт бошанд, векторҳои $\vec{a}, \vec{b}$ ва $\vec{a} + \vec{b}$ дар як хатти рост мехобанд (расми 34).



Расми 34

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$$

Супориш. Векторҳои дар расми 35 тасвирёфтаи $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ -ро ҷамъ кунед.



Расми 35

б) Қоидаи параллелограмм.

Масъалаи 4. Векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ дода шудаанд. $\vec{a}+\vec{b}$ -ро созед.

Маълум: $\vec{a}$ ва $\vec{b}$.

Матлуб: $\vec{a}+\vec{b}$.

Низоми сохтан:

1)Интихоби векторҳои $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва нуқтаи A (расми 36).

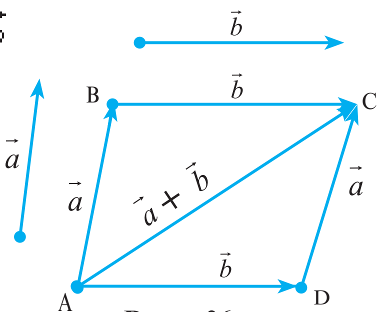
2) Сохтани $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.

3) Сохтани $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

4) Сохтани $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

5) Сохтани $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$.

6) Сохтани $\overrightarrow{AC}$.

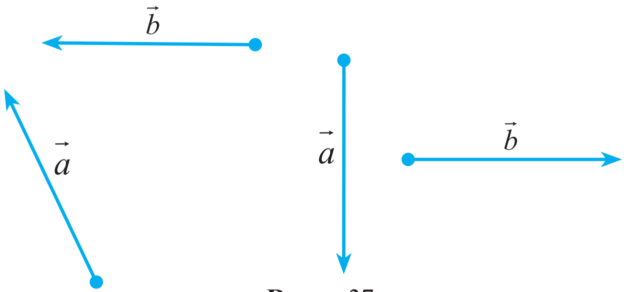


Расми 36

Матлуб: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$.

Супориш. Аз рӯйи расми 37 (а,б) суммаи векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ - ро созед.

в) Хосиятҳои ҷамъи векторҳо



Расми 37

Суммаи векторҳо дорои хосиятҳои зерин мебошад:

1) $\vec{a}+\vec{O}=\vec{a}$; 3) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

2) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{O}$; 4) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

Хосиятҳои суммаи векторҳоро ба тарзи зайл низ навиштан мумкин аст:

1) $\overrightarrow{AB}+\vec{O}=\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$;

2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{O}$; 4) $\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}$.

Исботи ин хосиятҳоро бо ёрии координатаҳо меорем.

Бигузор $\vec{a}=(x_1;y_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2)$, $\vec{c}=(x_3;y_3)$ бошад.

1) $\vec{a}+\vec{o}=(x_1;y_1)+(0;0)=(x_1+0;y_1+0)=(x_1;y_1)=\vec{a}$;

2) $\vec{a}+(-\vec{a})=(x_1;y_1)+(-x_1;-y_1)=(x_1-x_1;y_1-y_1)=\vec{O}$;

3) $\vec{a}+\vec{b}=(x_1;y_1)+(x_2;y_2)=(x_1+x_2;y_1+y_2)=$
$=(x_2+x_1;y_2+y_1)=(x_2;y_2)+(x_1;y_1)=\vec{b}+\vec{a}$;

4) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(x_1;y_1)+\left[(x_2;y_2)+(x_3;y_3)\right]=(x_1;y_1)+$
$+(x_2+x_3;y_2+y_3)=(x_1+(x_2+x_3),(y_1+(y_2+y_3))=$
$=((x_1+x_2)+x_3,(y_1+y_2)+y_3)=(x_1+x_2;y_1+y_2)+(x_3;y_3)=$
$=\left[(x_1;y_1)+(x_2;y_2)\right]+(x_3;y_3)=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}.$

Супориш. 1) Хосияти сеюми ҷамъи векторҳоро аз рӯйи қоидаи параллелограмм исбот намоед.

2) Хосияти чоруми ҷамъи векторҳоро аз рӯйи қоидаи секунҷагии ҷамъи векторҳо исбот намоед.

3) Агар $\vec{a}=(4;3), \vec{b}=(-2;-3), \vec{c}=(6;2)$ бошад:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}+\vec{c}$; в) $\vec{b}+\vec{c}$; г) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$-ро ёбед.

3. Тарҳи векторҳо

а) Фарқи векторҳои $\vec{a}=(x_1;y_1)$ ва $\vec{b}=(x_2;y_2)$-ро ин тавр меёбанд:

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(x_1;y_1)+(-x_2;-y_2)=(x_1-x_2;y_1-y_2)$, яъне $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2;y_1-y_2)$.

б) Тарзи сохтани фарқи векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$.

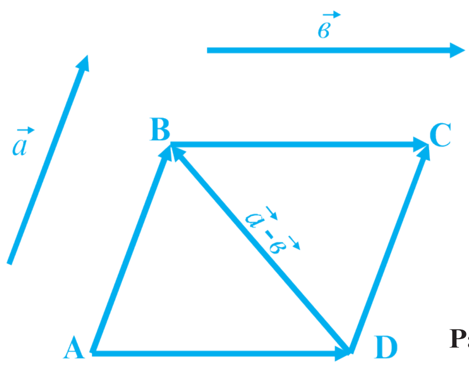
Низоми сохтан:

1) Интихоби векторҳои $\vec{a}, \vec{b}$ ва нуқтаи A.

2) Сохтани $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.

3) Сохтани $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

4) Сохтани $\overrightarrow{DB}$ (расми 38).



Расми 38

Диагонали калони параллелограмм $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, диагонали хурдаш $\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$ мебошад.

$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

Супориш. 1) Агар $\vec{a}=(5;6)$ ва $\vec{b}=(3;4)$ бошад, $\vec{a}-\vec{b}$ -ро ёбед.

2) Векторҳои $\vec{a}$, $\vec{b}$ дода шудаанд. Фарқи $\vec{a}-\vec{b}$ -ро бо қоидаи секунҷагӣ созед.

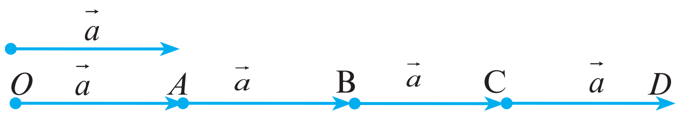
Нишондод. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(\overrightarrow{-b})$.

4. Зарби вектор ба адад

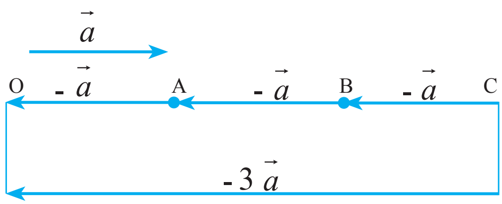
Таъриф. Ҳосили зарби вектори $\vec{a}=(x;y)$ ба адади λ векторест, ки координатаҳояш λx ва λy мебошанд, яъне

$\lambda\bullet\vec{a}=\lambda(x;y)=(\lambda x;\lambda y)$.

Масъалаи 5. Вектори $\vec{a}$ ва адади λ дода шудаанд, вектори $\lambda\bullet\vec{a}$ сохта шавад, агар: а) $\lambda=4$; б) $\lambda=-3$ бошад.



Расми 39



Расми 40

Низоми сохтан:

1) Интихоби вектори $\vec{a}$.

2) Сохтани нури *OA-и* ба вектори $\vec{a}$ ҳамсамт, агар $\lambda>0$ бошад.

3) Сохтани нури *OA-и* муқобилсамти $\vec{a}$, агар $\lambda<0$ бошад.

4) Сохтани $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{BC}=\vec{a}, \overrightarrow{CD}=\vec{a},$ агар $\lambda>0$ бошад.

5) Сохтани $\overrightarrow{AO}=-\vec{a}$ $\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=-\vec{a}$, агар $\lambda<0$ бошад.

Матлуб: $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=4\vec{a}$ (расми 39).

$\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=-\vec{a}-\vec{a}-\vec{a}=-3\vec{a}$ (расми 40).

Теорема. *Бузургии мутлақи вектори* $\overrightarrow{\lambda a}$ *ба* $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ *баробар аст. Дар ҳолати* $\lambda>0$ *ва* $\vec{a}\uparrow\vec{o}$ *будан, векторҳои* $\vec{a}$ *ва* $\overrightarrow{\lambda a}$ *ҳамсамтанд. Дар ҳолати* $\lambda<0$ *ва* $\vec{a}\uparrow\vec{o}$ *будан, векторҳои* $\vec{a}$ *ва* $\overrightarrow{\lambda a}$ *муқобилсамтанд.*

Исботи ин теорема мисли ҳалли масъалаи боло амалӣ карда мешавад.

4. Хосиятҳои зарби вектор ба адад

1) Барои ду адади дилхоҳи λ ва m:

$(\lambda+m)\bullet\vec{a}=\lambda\bullet\vec{a}+m\bullet\vec{a}.$

2) Барои ду вектори дилхоҳи $\vec{a},\vec{b}$ ва адади λ:

$\lambda\bullet(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\bullet\vec{a}+\lambda\bullet\vec{b}.$

Ин хосиятҳоро мустақилона исбот намоед.

Супориш. 1) Агар λ ва $\vec{a}$ маълум бошанд, $\lambda|\vec{a}|$-ро ёбед:

а) $\lambda=3, \vec{a}=(3;4)$;

б) $\lambda=-2, \vec{a}=(-5;12)$;

в) $\lambda=-5, \vec{a}=(-6;8)$;

г) $\lambda=\frac{1}{2}, \vec{a}=\left(\frac{3}{4};1\right)$.

2) Векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ дода шудаанд. Вектори $2\vec{a}+3\vec{b}$-ро созед.

3) Агар $\vec{a}=(3;4)$ ва $\vec{b}=(5;12)$ бошад, вектори $5\vec{a}+2\vec{b}$ ва $|5\bullet\vec{a}+2\bullet\vec{b}|$-ро ёбед.

5. Шарти коллинеарӣ будани ду вектор

Теорема. *Агар векторҳои ғайрисифрии* $\vec{a}$ *ва* $\vec{b}$ *коллинеарӣ бошанд, он гоҳ чунин адади* λ *мавҷуд аст, ки* $\vec{b}=\lambda\cdot\vec{a}$ *мешавад.*

Исбот. Агар векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ҳамсамт бошанд, $\vec{b}$ ва $\vec{a}\bullet\left(\left|\frac{\vec{b}}{\vec{a}}\right|\right)$ ҳамсамт буда, қиматҳои мутлақи баробар доранд.

Пас, $\vec{b}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\bullet\vec{a}=\lambda\bullet\vec{a}, \lambda=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}.$

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ муқобилсамт бошанд, $\vec{b} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a}$ ва $\lambda = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ мешавад.

Масъалаи 6. Исбот кунед, ки векторҳои $\vec{a} = (5;6)$ ва $\vec{b} = (10;12)$ коллинеарӣ мебошанд.

Ҳал. $\vec{b} = (10;12) = (2 \cdot 5; 2 \cdot 6) = 2(5;6) = 2 \cdot \vec{a};\ \vec{b} = 2 \cdot \vec{a}$. Аз ин ҷо бармеояд, ки векторҳои $\vec{b}$ ва $\vec{a}$ коллинеарианд.

Агар векторҳои $\vec{a} = (x_1; y_1)$ ва $\vec{b} = (x_2; y_2)$ коллинеарӣ бошанд, он гоҳ $\lambda = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$ буда, $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ мебошад.

Супориш. 1) Исбот кунед, ки векторҳои $\vec{a} = (8;6)$ ва $\vec{b} = (4;3)$ коллинеарианд.

2) λ-ро ёбед, агар $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, $\vec{a} = (24;32)$, $\vec{b} = (3;4)$ бошад.

6. Зарби скалярии векторҳо

Таъриф. *Зарби скалярии векторҳои* $\vec{a} = (x_1; y_1)$ *ва* $\vec{b} = (x_2; y_2)$ *гуфта, адади* $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ *-ро меноманд, яъне*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1; y_1) \cdot (x_2; y_2) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2.$$

Зарби скалярии $\vec{a} \cdot \vec{a}$ бо $\vec{a}^{\,2}$ ишора карда мешавад.

Теорема. *Баробарии* $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$ *дуруст аст.*

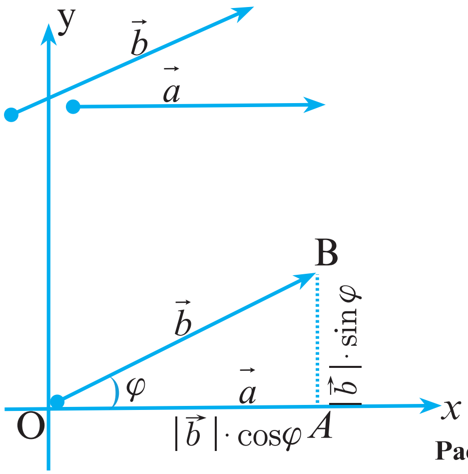
Исбот. Мувофиқи таъриф:

$$\vec{a} = (x; y),\ \vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = (x; y) \cdot (x; y) = x \cdot x + y \cdot y = x^2 + y^2 = |\vec{a}\,|^2,$$

яъне $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}\,|^2$ аст.

Теорема. *Зарби скалярии векторҳо ба ҳосили зарби бузургии мутлақи ҳар кадоме аз ин векторҳо ва косинуси кунҷи байни онҳо баробар аст. Яъне* $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}\,| \cdot |\vec{b}\,| \cdot \cos\varphi$.

Исбот. Бигузор, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ду вектори додашуда бошанд. Аз нуқтаи О векторҳои $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ва $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ -ро мегузаронем. $\angle AOB=\varphi$.



Расми 41

Аз ин ҷо $\overrightarrow{OB}=\vec{b}=(|\vec{b}|\cdot\cos\varphi;|\vec{b}|\cdot\sin\varphi), \overrightarrow{OA}=\vec{a}=(|\vec{a}|;0)$;

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(|\vec{b}|\cdot\cos\varphi;|\vec{b}|\cdot\sin\varphi)(|\vec{a}|;0))=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi+0\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$
$=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$.

Яъне, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$.

Теорема. *Агар векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ перпендикуляр бошанд, он гоҳ ҳосили зарби скалярияшон ба сифр баробар аст.*

Маълум: $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Матлуб: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Исбот. Аз шарти перпендикулярии векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ бармеояд, ки $\varphi=90^0$ аст. Пас $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 90^0=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot 0=0$.

Масъалаи 7. Исбот кунед, ки суммаи квадратҳои диагоналҳои параллелограмм ба суммаи квадратҳои тарафҳояш баробар аст.

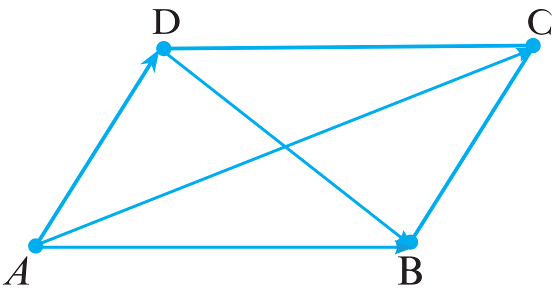
Маълум: ABCD – параллелограмм.

Матлуб: $AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$.

Исбот. Дар расми 42:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD} \quad (2)$$



Расми 42

Баробариҳои (1) ва (2) -ро ба квадрат бардошта, ҷамъ мекунем:

$$\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD};$$

$$\overrightarrow{DB}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD};$$

$$\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{DB}^2=2\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AD}^2.$$

Азбаски $\overrightarrow{AC}^2=AC^2, \overrightarrow{DB}^2=DB^2, \overrightarrow{AB}^2=AB^2, \overrightarrow{AD}^2=AD^2$ аст, пас

$AC^2+DB^2=2AB^2+2AD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$.

Дар охир: $AC^2+DB^2=2(AB^2+AD^2)$.

Супориш. 1) Исбот кунед, ки агар d диагонали квадрат ва a тарафаш бошад, $d^2=2a^2$ аст.

2) Исбот кунед, ки агар дар ромб d_1 ва d_2 диагоналҳо буда, a тараф бошад, $d_1^2+d_2^2=4a^2$ аст.

3) Исбот кунед, ки агар дар росткунҷа d диагонал ва a,b тарафҳо бошанд, $d^2=a^2+b^2$ аст.

4) Зарби скалярии векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ -ро ёбед, агар

$\vec{a}=(3;4), \vec{b}=(6;-2); \vec{a}=(-3;-7), \vec{b}=(2;6)$ бошад.

5) Исбот кунед, ки векторҳои а) $\vec{a}=(4;1)$ ва $\vec{b}=(1;-4)$;

б) $\vec{a} = (8;2)$ ва $\vec{b} = (0,5;-2)$ перпендикуляранд.

Кунҷи байни векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ -ро бо формулаи зерин ҳисоб мекунанд:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Агар $\vec{a} = (x_1; y_1)$ ва $\vec{b} = (x_2; y_2)$ бошад, он гоҳ

$$\cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Супориш. 1) Кунҷи байни векторҳои $\vec{a} = (3;4)$ ва $\vec{b} = (1;-3)$ -ро ёбед.

2) Кунҷи байни векторҳои $\vec{a} = (3;1)$ ва $\vec{b} = (1;-3)$ -ро ёбед.

7. Векторҳои воҳидӣ. Ҷудо кардани вектор ба векторҳои воҳидӣ

Таъриф. *Векторе, ки дарозияш ба як баробар аст, вектори воҳидӣ ном дорад.*

Вектори $\vec{e}_1 = (1;0)$ вектори воҳидии тири абсисса ва вектори $\vec{e}_2 = (0;1)$ вектори воҳидии тири ордината мебошад (расми 43).

Вектори дилхоҳи $\vec{a} = (x;y)$-ро ин тавр ба векторҳои воҳидӣ ҷудо мекунанд:

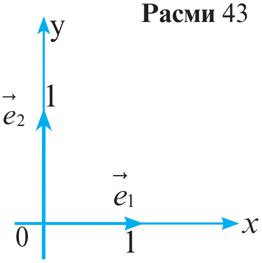
$\vec{a} = \nu\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2$

$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x(1;0) + y(0;1) =$

$= (x;0) + (0;y) = (x;y).$

Аз ин ҷо $\nu = x; \quad \mu = y.$

Расми 43



Масъалаҳо

1) Нуқтаҳои $A(0;1), B(1;0), C(1;2), D(2;1)$ дода шудаанд. Исбот кунед, ки векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ баробаранд.

2) Нуқтаҳои A (3;0), B (0;4), C (3;4) қуллаҳои секунҷаи ABC мебошанд. Векторҳои $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ ва бузургии мутлақи онҳоро ёбед.

3) Дарозии вектори $\vec{a} = (5; m)$ ба 13 баробар аст. Адади m-ро ёбед:

4) Вектори $\vec{a} + \vec{b}$ ва $|\vec{a} + \vec{b}|$-ро ёбед, агар а) $\vec{a} = (1; -4), \vec{b} = (-4; 1)$; б) $\vec{a} = (2; 5), \vec{b} = (4; 3)$ бошад.

5) Дар параллелограмми ABCD суммаи векторҳои зеринро ёбед:

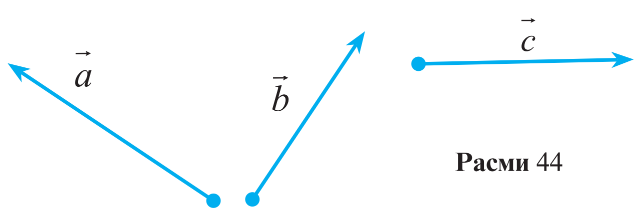
1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$;

3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; 4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$.

6) Векторҳои $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AC}$ дода шудаанд. Исбот кунед, ки $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ аст.

7) Дар расми 44 векторҳои $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ дода шудаанд. Векторҳои зерин сохта шаванд:

1) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; 2) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; 3) $-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



Расми 44

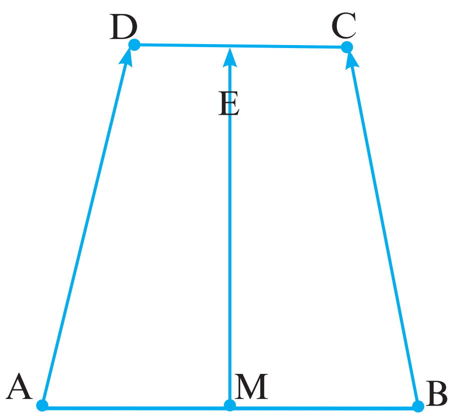
8) Векторҳои $\vec{a} = (3; 2)$ ва $\vec{b} = (0; -1)$ дода шудаанд. Вектори $-2\vec{a} + 2\vec{b}$ ва бузургии $|-2\vec{a} + 4\vec{b}|$-ро ёбед.

9) Дарозии вектори $\lambda \cdot \vec{a}$ ба 5 баробар аст. λ-ро ёбед, агар:

а) $\vec{a} = (-6;8)$; б) $\vec{a} = (3;-4)$ бошад.

10) Нуқтаи M миёначойи порчаи AB мебошад. Агар 0– нуқтаи ихтиёрӣ бошад, исбот кунед, ки $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA})$ аст.

11) Нуқтаҳои M ва E миёначойи порчаҳои AB ва CD мебошанд (Расми 45). Исбот кунед, ки $\overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ аст.



Расми 45

12) Векторҳои $\vec{a} = (2;-4), \vec{b} = (1;1), \vec{c} = (1;-2), \vec{d} = (-2;-4)$ дода шудаанд. Кадоме аз ин векторҳо ҳамсамт ва кадомашон муқобилсамт мебошанд?

13) Векторҳои $\vec{a} = (1;4)$ ва $\vec{b} = (-2;m)$ коллинеариянд. Қимати m-ро ёбед.

14) Кунҷи байни векторҳои $\vec{a} = (2;2)$ ва $\vec{b} = \left(1;-\frac{1}{2}\right)$ -ро ёбед.

15) Агар $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ва кунҷи байни векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ 60^0 бошад, $|\vec{a} + \vec{b}|$-ро ёбед.

16) Кунҷи байни векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{a}+\vec{b}$ -ро ёбед, агар $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ ва кунҷи байни векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ 30^0 бошад.

17) Нуқтаҳои $A)(1;1), B(4;1), C(4;5)$ қуллаҳои секунҷаи ABC мебошанд. Кунҷҳои секунҷаро ёбед.

18) Кунҷҳои секунҷаи қуллаҳояш $M(0;\sqrt{3}), P(2;\sqrt{3})$, $C\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$-ро ёбед.

19) Барои кадом қиматҳои m векторҳои $\vec{a}=(3;4)$ ва $\vec{b}=(m;2)$ перпендикуляранд?

20) Чор нуқтаи $A(1;1)$, $B(2;3)$, $C(0;4)$, $D(-1;2)$ дода шудаанд. Исбот кунед, ки чоркунҷаи $ABCD$ росткунҷа аст.

21) Бо ёрии векторҳо исбот кунед, ки диагоналҳои ромб перпендикуляранд.

22) Исбот кунед, ки чоркунҷаи ABCD квадрат аст, агар $A(0;0)$, $B(2;3)$, $C(0;4)$, $D(-1;2)$бошад.

23) Кадоме аз векторҳои зерин воҳидиянд:

$$\vec{a}=\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right), \vec{b}=\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right), \vec{c}=(0;1), \vec{d}=\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)?$$

24) Вектори воҳидии $\vec{e}$ -ро ёбед, ки ба вектори $\vec{a}=(6;8)$ ҳамсамт бошад.

Савол ва супоришҳо барои санҷиш

1. Вектор чист?

2. Бузургии векторӣ аз дигар бузургиҳо бо чӣ фарқ мекунад?

3. Кадом бузургиҳои вектириро медонед?

4. Дарозии вектор ё бузургии мутлақи векторро чӣ гуна меёбанд?

5. Формулаи бузургии мутлақи вектори $\vec{a} = (x;y)$-ро нависед.

6. Формулаи бузургии мутлақи вектори $\overrightarrow{AB}$ -ро нависед, агар $A(x_1;y_1)$ ва $B(x_2;y_2)$ бошад.

7. Таърифи баробарии векторҳоро баён кунед.

8. Ҳолатҳои ҷойгиршавии векторҳоро фаҳмонед.

9. Таърифи векторҳои коллинеариро баён кунед.

10. Суммаи векторҳоро ба воситаи координатаҳояшон нависед.

11. Хосиятҳои ҷамъи векторҳоро номбар кунед.

12. Қоидаи секунҷагии ҷамъи векторҳоро баён кунед.

13. Ҷамъи векторҳоро аз рӯйи қоидаи параллелограмм нишон диҳед.

14. Фарқи векторҳоро баён намоед.

15. Зарби вектор ба адад кадом хосиятҳоро доро мебошад?

16. Зарби скалярии векторҳоро баён кунед.

17. Кунҷи байни векторҳоро аз рӯйи кадом формула меёбанд?

18. Шарти коллинеарӣ будани векторҳоро фаҳмонед.

19. Шарти перпендикулярии векторҳоро баён кунед.

20. Диагоналҳои параллелограмм чӣ гуна хосият доранд?

21. Вектори сифрӣ чист?

22. Вектори воҳидӣ чист?

23. Теоремаро дар бораи зарби скалярии векторҳо баён кунед.

24. Векторро чӣ гуна ба векторҳои воҳидӣ ҷудо мекунанд?

ФАСЛИ III. МОНАНДӢ ВА ГОМОТЕТИЯ

§ 3.1. Порчаҳои мутаносиб

1. Нисбати порчаҳо

Бигузор порчаҳои $AB = a$ ва $CD = b$ дода шуда бошанд. Дарозии порчаи AB-ро ба дарозии порчаи CD тақсим мекунем:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{a}{b} \text{ ё } AB:CD = a:b.$$

Таъриф. *Ҳосили тақсими дарозиҳои ду порчаро нисбати ин порчаҳо меноманд.*

Нисбати порчаҳо нишон медиҳад, ки як порча чанд ҳиссаи порчаи дигарро ташкил медиҳад.

Агар порчаи AB = 3 см ва порчаи CD = 6 см бошад,
$AB : CD = 3\text{см} : 6\text{см} = 1 : 2$.

Дар ин сурат мегӯянд, ки порчаҳои AB ва CD ҳамчун як бар ду нисбат доранд. Нисбати порчаҳо ба воҳиди андозакунӣ вобастагӣ надорад.

Масалан, AB=4 см ва CD=12 см; AB=4 м ва CD=12 м. Дар ҳар ду ҳолат AB: CD = 4 : 12=1:3 мебошад.

Масъалаи 1. Нуқтаи B дар порчаи $AC = 48$ см мехобад. Агар порчаҳои AB ва BC ҳамчун 3:5 нисбат дошта бошанд, дарозии онҳоро ёбед.

Маълум: $AB + BC = AC$, $AB:BC = 3:5$ ва $AC = 48$ см.
Матлуб: AB ва BC.

Расми 46

Ҳал. Бигузор, x як ҳисса бошад, он гоҳ $AB=3x$ ва $BC=5x$ аст.

Аз $AB+BC$=48 см бармеояд, ки $3x+5x$=48 буда, x=6 *см* аст.

Аз ин ҷо: AB=3·6 см=18 см ва BC=5·6 см=30 см аст.

Ҷавоб: AB=18 см; BC=30 см.

Супориш. Агар $a+b=60$ м ва

а) $a:b = 5:1$;   б) $a:b = 1:2$;   в) $a:b = 4:11$ бошад, дарозии порчаҳои a ва b-ро ёбед.

2. Порчаҳои мутаносиб

Таъриф. *Агар нисбати порчаҳои a ва b ба нисбати порчаҳои c ва d баробар бошад, мегӯянд, ки порчаҳои a ва b бо порчаҳои c ва d мутаносибанд.* Ҳамин тариқ, агар $a:b=c:d$ бошад, порчаҳои a ва b бо порчаҳои c ва d мутаносибанд.

Масъалаи 2. Маълум аст, ки $AB=10$ см, $CD = 20$ см ва $A_1B_1=40$ см, $C_1D_1=80$ см мебошанд. Исбот кунед, ки порчаҳои AB ва CD бо порчаҳои A_1B_1 ва C_1D_1 мутаносибанд.

Ҳал. $AB: A_1B_1=10$ см$:40$ см$=1:4$; $CD:C_1D_1=20$см$:80$ см$=1:4$.

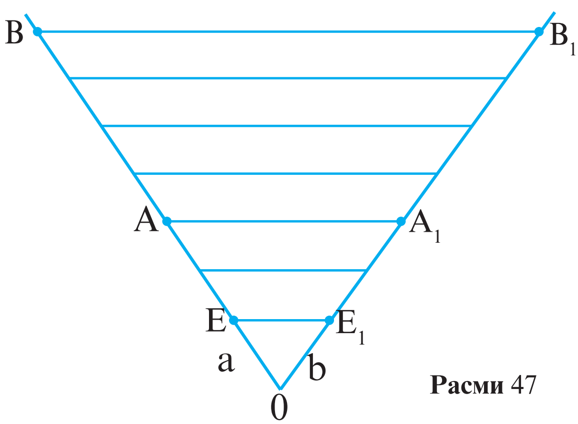
Теорема. *Агар тарафҳои кунҷ бо хатҳои рости параллел бурида шаванд, порчаҳое, ки дар як тарафи кунҷ ҳосил мешаванд, ба порчаҳои мувофиқи дар тарафи дуюми кунҷ ҳосилшуда мутаносибанд.*

Маълум: $\angle AOA_1, AA_1 \parallel BB_1$.

Матлуб $OA:OB=OA_1:OB_1$,

$OA:AB=OA_1:A_1B_1$.

Исбот. Дар расми 47 порчаи $OE=a$ ва $OE_1=b$, $OA=3a$, $OB=7a$, $AB=4a$ мебошад. Мувофиқи теоремаи Фалес $OA_1=3b$, $OB_1=7b$ ва $A_1B_1=4b$ аст.



Расми 47

$OA: OB=3a:7a=3:7$ ва $OA_1:OB_1=3b:7b=3:7$ буда,

$OA:OB=OA_1:OB_1$ мебошад.

Айнан, ҳамин тариқ, $OA:AB=3a:4a=3:4$ ва $OA_1:A_1B_1=$ $=3b:4b=3:4$ буда, $OA:AB=OA_1:A_1B_1$ аст.

Дар ҳолати умумӣ, агар $OA=na$, $AB=ma$ ва $OB=(n+m)a$ бошад, $OA_1=nb$, $A_1B_1=mb$ ва $OB=(n+m)b$ мешавад.

Дар натиҷа, $OA:OB=OA_1:OB_1$ ва $OA:AB=OA_1:A_1B_1$ мешавад.

Бояд қайд кард, ки ададҳои m ва n метавонанд яклухт ва ё касрӣ бошанд, аз ин мутаносибии порчаҳо вайрон намешавад.

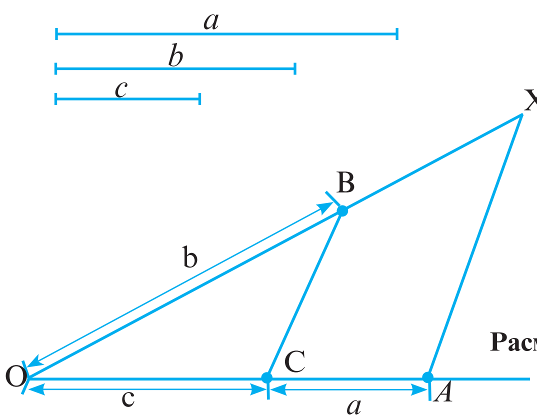
Масъалаи 3. Порчаҳои a, b, c дода шудаанд. Порчаи $x=\dfrac{bc}{a}$ сохта шавад.

Таҳлил. Аз худи ифодаи додашуда бармеояд, ки $x:b=c:a$ мебошад. Аз ин ҷо порчаҳои x ва b ба порчаҳои c ва a мутаносибанд.

Низоми сохтан:

1. Интихоби порчаҳои a, b, c.
2. Сохтани кунҷи тези қуллааш O.
3. Сохтани $OA=a$ ва $OC=c$ дар як тарафи кунҷ.
4. Сохтани $OB=b$ дар тарафи дуюми кунҷ.
5. Сохтани $AX \parallel CB$ (аз нуқтаи А).
6. X-нуқтаи бурриши AX ва тарафи дуюми кунҷ.

Матлуб: x=OX (расми 48).



Расми 48

Масъалаҳои амалӣ

1. Агар $a:b=c:x$ буда; a=22см, b=11см, $c=8a$ бошад, порчаи x-ро ёбед.

2. $a:x=c:b$, a=20см, c=5см ва b=6см. Порчаи x-ро ёбед.

3. Порчаҳои AB, BC, CD дар як хатти рост хобида, бо ададҳои 4,5 ва 3 мутаносибанд. Агар AD=60 бошад, порчаҳои AB, BC ва CD-ро ёбед.

4. Порчаи $x = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$ ро созед, агар порчаҳои a, b, c, d, e дода шуда бошанд.

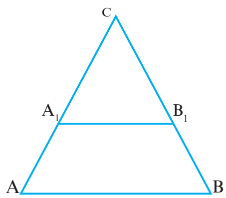
5. Периметри секунҷа ба 48 см баробар буда, тарафҳояш ҳамчун 3:2:3 нисбат доранд. Тарафҳои секунҷаро ёбед.

6. Порчаи a дода шудааст. Порчаи x-ро созед, агар:

а) $x = \dfrac{1}{2}a$; в) $x = \dfrac{3}{4}a$.

б) $x = \dfrac{7}{4}a$

бошад.



Расми 49

7. Порчаҳои a ва b дода шудаанд. Порчаи $x = a-b$-ро созед.

8. Дар расми 49 $A_1B_1 \parallel AB$, AA_1=20см, $CA_1:CA = 2:3$ аст. Агар BB_1=50 см бошад, порчаҳои CA_1, CA, CB_1, CB-ро ёбед.

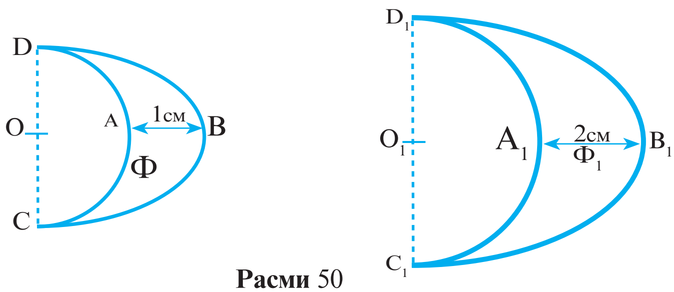
§ 3.2. Мафҳуми монандӣ

Ду расми як шахс, ки бо андозаҳои хурд ва калон гирифта шудаанд, ба якдигар монанд мебошанд.

Ду харитаи географии Тоҷикистон, ки бо андозаҳои гуногун тартиб дода шудаанд, ба якдигар монананданд.

Аз ҳаёт боз кадом ашё ё фигураҳои монандро мисол овардан мумкин аст?

Ба расми 50 нигаред. Шумо ду фигураи Ф ва $Ф_1$-и бо ҳам монандро мебинед.

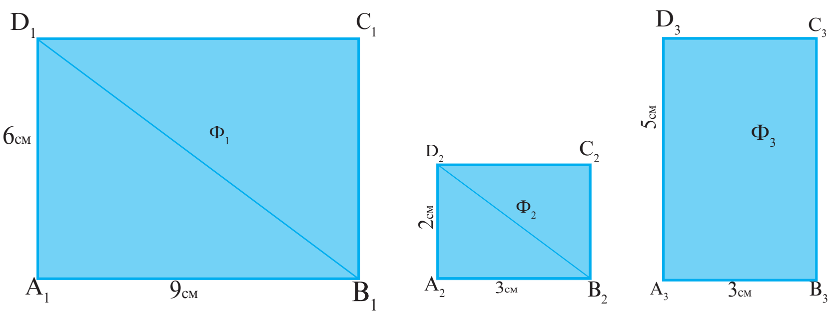


Расми 50

Ҳар ду фигура зоҳиран монанд буда, андозаҳояшон фарқ мекунанд.

Масалан, дар фигураи Φ, AB=1 см ва CD=2см буда, дар фигураи Φ_1: A_1B_1=2 см ва C_1D_1=4 см аст.

Андозаҳои фигураи Φ_1 аз андозаҳои фигураи Φ ду баробар калонанд.



Расми 51

Дар расми 51 нақшаи се қитъаи замин дода шудааст. Ҳарсеи онҳо росткунҷа мебошанд.

Ҳар се тасвир дар назар бо сабаби росткунҷа буданашон монанданд.

Андозаҳоро муқоиса менамоем:

1) $A_1B_1:A_2B_2$=9:3=3; $A_1D_1:A_2D_2$=6:2=3. Аз ин ҷо фигураи $Ф_1$ ба фигураи $Ф_2$ монанд аст, чунки $A_1B_1:A_2B_2=A_1D_1:A_2D_2$=3 мебошад. Яъне, андозаҳои фигураи Φ_2 аз андозаҳои фигураи Φ_1 се баробар хурд мебошанд.

Дар фигураи $Ф_1$: $B_1D_1 = \sqrt{A_1D_1^2 + A_1B_1^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117}$ см.

Дар фигураи $Ф_2$: $B_2D_2 = \sqrt{A_2D_2^2 + A_2B_2^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ см.

$B_1D_1 : B_2D_2 = \sqrt{117} : \sqrt{13} = \sqrt{9} = 3$.

2) $A_1B_1 : A_3B_3 = 9:3 = 3$; $A_1D_1 : A_3D_3 = 6:5 = 1\frac{1}{2}$, яъне $A_1B_1 : A_3B_3 \neq A_1D_1 : A_3D_3$.

Дар ин ҷо фигураҳои $Ф_1$ ва $Ф_3$ монанд нестанд, зеро андозаҳо ба миқдори баробар кам нашудаанд. Акнун шумо мустақилона андозаҳои фигураҳои $Ф_2$ ва $Ф_3$-ро муқоиса намуда, дар бораи монанд будан ё набудани онҳо хулоса бароред.

Аз гуфтаҳои боло бармеояд, ки масофаи байни ду нуқтаи мувофиқи шаклҳои монанд аз ҳамдигар k баробар фарқ мекунанд.

Мисолҳои овардашуда имкон медиҳанд, ки таърифи фигураҳои монандро дохил кунем.

Таъриф. *Ду фигурае, ки шакли зоҳирияшон як буда, андозаҳояшон k маротиба фарқ мекунанд, фигураҳои монанд номида мешаванд. Адади k-коэффитсиенти монандии фигураҳо ном дорад.*

Агар фигураи $Ф$ ба фигураи $Ф_1$ бо коэффитсиенти k монанд бошад, чунин менависанд: $Ф_1 \overset{k}{\sim} Ф$.

Таъриф. *Табдилдиҳие, ки фигураи дилхоҳи $Ф$-ро бо фигураи ба он монанди $Ф_1$ бо коэффитсиенти к табдил медиҳад, табдилдиҳии монандӣ номида мешавад.*

Хосиятҳои монандии фигураҳо инҳоянд:

1. Агар фигураи $Ф$ ба фигураи $Ф_1$ бо коэффитсиенти k монанд буда, x ва y нуқтаҳои фигураи $Ф$, x_1 ва y_1 мувофиқан нуқтаҳои фигураи $Ф_1$ бошанд, $x_1y_1 = k \cdot xy$ мебошад.

Мисолҳои дар аввали ҳамин параграф овардашуда дурустии ин хосиятро нишон медиҳанд.

2. Ду хатти рости дилхоҳ монанданд.

3. Ду нури дилхоҳ монанданд.

4. Ду порчаи дилхоҳ монанданд.

5. Агар $Ф \sim Ф_1$ бошад, $Ф_1 \overset{1}{\sim} Ф$ мебошад.

Исбот. $\Phi \sim \Phi_1$. Аз ин бармеояд, ки $x_1y_1 = xy = 1\cdot xy$. Аз ин ҷо $\Phi \overset{1}{\sim} \Phi_1$.

6) Фигураи дилхоҳ ба худаш монанд аст.

7) Ду кунҷи баробар монанд мебошанд.

8) Агар $\Phi_1 \overset{k}{\sim} \Phi$ бошад, он гоҳ $\Phi \overset{\frac{1}{k}}{\sim} \Phi_1$ аст.

Исбот. $\Phi_1 \overset{k}{\sim} \Phi$. Ин чунин маъно дорад, ки $x_1y_1 = k\cdot xy$ буда, $xy = \frac{1}{k}\ x_1y_1$ мебошад. Аз ин бармеояд, ки $\Phi \overset{\frac{1}{k}}{\sim} \Phi_1$ аст.

9) Агар $\Phi_1 \overset{k_1}{\sim} \Phi$ ва $\Phi_2 \overset{k_2}{\sim} \Phi_1$ бошад, $\Phi_2 \overset{k_1\cdot k_2}{\sim} \Phi_1$ мешавад.

Исбот. Аз $\Phi_1 \overset{k_1}{\sim} \Phi$ ва $\Phi_2 \overset{k_2}{\sim} \Phi_1$ бармеояд, ки $x_1y_1 = k_1\cdot xy$ ва $x_2y_2 = k_2\cdot x_1y_1$. Аз ин ҷо $x_2y_2 = k_2\cdot x_1y_1$ буда, $\Phi_2 \overset{k_1\cdot k_2}{\sim} \Phi_1$ мебошад.

Аз хосиятҳои монандӣ натиҷаи зерин мебарояд.

Натиҷа. Агар ду фигура монанд бошанд, кунҷҳои мувофиқашон баробар ва порчаҳои мувофиқашон мутаносиб мешаванд.

Агар порчаҳои AB ва BC ба порчаҳои A_1B_1 ва B_1C_1 мутаносиб бошанд, баробарии зерин ҳама вақт иҷро мешавад:

$$AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1.$$

Масъалаҳои амалӣ

1. Исбот кунед, ки ду фигураи нисбат ба маркази симметрӣ монанданд.

Исбот. Бигузор $\Phi_1 = S\cdot(\Phi)$ бошад. Шаклҳои нисбат ба маркази O симметрӣ бо ҳамдигар баробаранд. Яъне, $\Phi_1 = \Phi$. Аз ин ҷо бармеояд, ки $\Phi_1 \sim \Phi$.

2. Исбот кунед, ки ду фигураи нисбат ба тир симметрӣ монанданд.

3. Исбот кунед, ки агар параллелкӯчонӣ фигураи Φ-ро ба Φ_1 табдил дода бошад, он гоҳ Φ_1 ба Φ монанд аст.

4. Исбот кунед, ки агар гардиш фигураи Φ-ро ба Φ_1 табдил дода бошад, Φ_1 ба Φ монанд аст.

5. Исбот кунед, ки квадрат ва ромби тарафҳояшон мувофиқан ба *a* баробар, монанд нестанд.

6. Исбот кунед, ки росткунҷа ва параллелограмми тарафҳои ҳамсояашон ба *a, b* баробар, монанд нестанд.

7. Ду квадрат дода шудааст. Тарафи яке 15 см ва аз дигаре 3 см мебошад. Исбот кунед, ки квадратҳо монанданд. Коэффитсиенти монандиро ёбед.

8. Тарафҳои росткунҷаи $ABCD$ ба 16см ва 18 см баробар буда, тарафҳои росткунҷаи $A_1B_1C_1D_1$ ба 32 см ва 36 см баробаранд. Оё ин росткунҷаҳо монанданд?

9. Росткунҷаи $ABCD$ ба росткунҷаи $A_1B_1C_1D_1$ монанд буда, AB=5 см, AD=7 см ва A_1B_1=20 см аст. Тарафи A_1D_1-ро ёбед.

10. Ромби $ABCD$ ба ромби $A_1B_1C_1D_1$ монанд буда, $\angle A=30^0$ аст. Кунҷҳои ромби $A_1B_1C_1D_1$-ро ёбед.

11. Квадрати $ABCD$ ба квадрати $A_1B_1C_1D_1$ бо коэффитсиенти $к$=2 монанд буда, квадрати $A_1B_1C_1D_1$ ба квадрати $A_2B_2C_2D_2$ бо коэффитсиенти $к$=3 монанд аст. Агар AB=10 м бошад, тарафҳои квадрати $A_2B_2C_2D_2$-ро ёбед.

12. Оё параллелограмм ба трапетсия монанд шуда метавонад?

13. Оё нур ба хатти рост монанд шуда метавонад? Ҷавобро шарҳ диҳед.

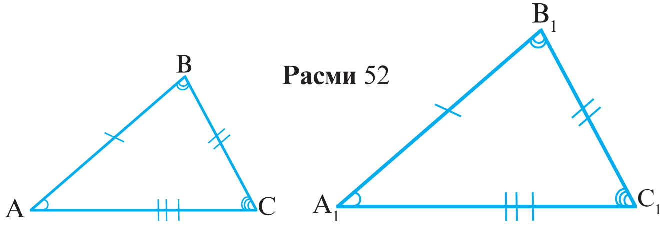
14. Исбот кунед, ки нисбати периметрҳои ду росткунҷаи монанд ба коэффитсиенти монандӣ баробар аст.

§ 3.3. Монандии секунҷаҳо

1. Таърифи монандии секунҷаҳо

Таъриф. *Ду секунҷае, ки кунҷҳои мувофиқан баробар дошта, тарафҳои мувофиқашон мутаносибанд, секунҷаҳои монанд номида мешаванд.* Ҳамин тариқ, агар $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ бошад, он гоҳ $\angle A_1 = A,\ \angle B_1 = \angle B,\ \angle C_1 = \angle C$ ва $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}=к$ мебошад (Расми 52).

Масъалаи 1. Секунҷаи мунтазами ABC дорои тарафи 6 см ва секунҷаи мунтазами $A_1B_1C_1$ дорои тарафи 18 см аст. Исбот кунед, ки ин секунҷаҳо монанданд.



Расми 52

Маълум: $AB=BC=AC=6$ см, $A_1B_1=B_1C_1=A_1C_1=18$ см.

Матлуб: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ ва $к$.

Исбот. Аз мунтазам будани секунҷаи ABC бармеояд, ки $\angle A=\angle B=\angle C=60^0$ мебошад.

Аз ин ҷо маълум мешавад, ки $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$ аст.

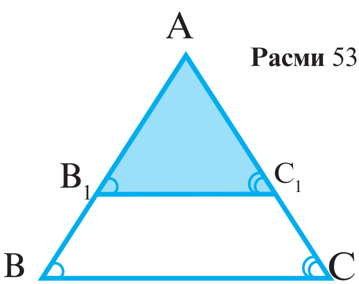
Аз $AB=BC=AC=6$ см ва $A_1B_1=B_1C_1=A_1C_1=18$ см бармеояд, ки $\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{B_1C_1}{BC}=\dfrac{A_1C_1}{AC}=\dfrac{18}{6}=3$ аст.

Ҳамин тариқ, $к=3$ буда, $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ мебошад.

2. Лемма. *Агар ду тарафи секунҷаро бо хатти рости ба тарафи сеюм параллел бурем, секунҷае ҳосил мешавад, ки ба секунҷаи додашуда монанд аст.*

Маълум: $B_1C_1 \parallel BC$, ΔABC.

Матлуб: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.



Расми 53

Исбот. $B_1C_1 \parallel BC$. Аз ин ҷо бармеояд, ки $\angle B_1=\angle B$, $\angle C_1=\angle C$ ва $к=AB_1:AB=AC_1:AC$ аст (Расми 53).

Кунҷи A барои ҳар ду секунҷа умумӣ аст.

Шарти якуми монандии секунҷаҳо иҷро мешавад, чунки кунҷҳои мувофиқ баробаранд.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_1A} - \overrightarrow{AC_1}$.

Аз тарафи дигар, $\overrightarrow{BA} = k\ \overrightarrow{B_1A},\ \overrightarrow{AC} = k \bullet \overrightarrow{AC_1}$ мебошад.

Аз ин ҷо $\overrightarrow{BC} = k \cdot \overrightarrow{B_1A} - k \cdot \overrightarrow{AC_1} = k\left(\overrightarrow{B_1A} - \overrightarrow{AC_1}\right) = k \cdot \overrightarrow{B_1C_1}$ ва $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{B_1C_1}$, пас $BC:B_1C_1=k$ аст.

Аз дурустии $AB:AB_1=AC:AC_1=BC:B_1C_1$ бармеояд, ки шарти дуюми монандии секунҷаҳо низ иҷро мешавад. Пас $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ аст.

3. Аломати якуми монандии секунҷаҳо

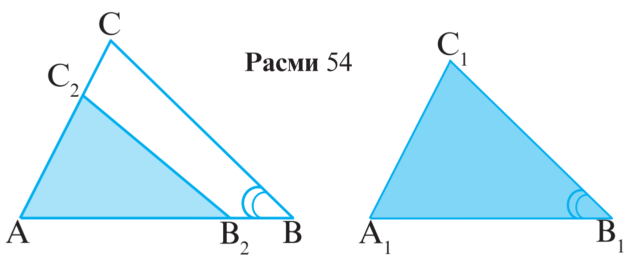
Теорема. *Агар ду кунҷи як секунҷа мувофиқан ба ду кунҷи секунҷаи дигар баробар бошанд, ин секунҷаҳо монананд.*

Маълум: $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$.

Матлуб: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

Исбот. Дар нури AB порчаи $AB_2=A_1B_1$ ва аз нуқтаи B_2, $B_2C_2 \| BC$-ро месозем (расми 54).

Азбаски $B_2C_2 \| BC$ аст, $\angle B_2=\angle B$ ва $\angle C_2=\angle C$ мебошад.



Расми 54

Пас, $\angle B_1=\angle B_2$ аст. Аз дурустии $AB_2=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$ ва $\angle B_2=\angle B_1$ мебарояд, ки $\Delta AB_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$ буда, $\angle C_2 = \angle C_1, AC_2 = A_1C_1$ ва $B_2C_2 = B_1C_1$ мебошад.

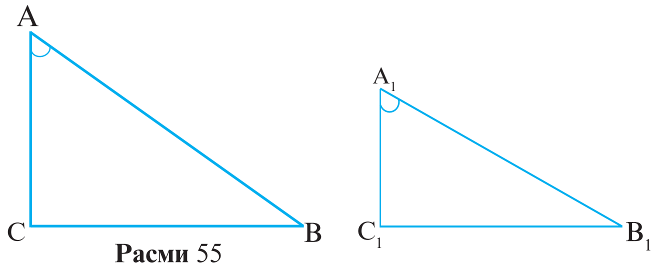
Аз ин ҷо бармеояд, ки $\Delta AB_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$ ва $\frac{AB_2}{AB} = \frac{AC_2}{AC} = \frac{B_2C_2}{BC}$ аст.

Маълум аст, ки $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_2$, $\angle C=\angle C_2=\angle C_1$ мебошад.

Дар охир $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ аст.

Масъалаи 2. Исбот кунед, ки агар ду секунҷаи росткунҷа яктоӣ кунҷи тези баробар дошта бошанд, онҳо ба якдигар монанданд.

Маълум: $\Delta A_1B_1C_1$ ва ΔABC - секунҷаҳои росткунҷа, $\angle A = \angle A_1$ (Расми 55).



Расми 55

Матлуб: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

Исбот. Ба мо маълум аст, ки $\angle A = \angle A_1$ ва $\angle C = \angle C_1 = 90^0$.

Мувофиқи аломати якуми монандии секунҷаҳо $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$. аст.

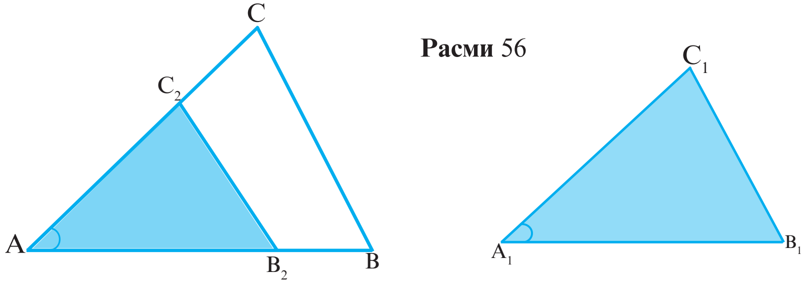
4. Аломати дуюми монандии секунҷаҳо

Теорема. *Агар ду тарафи як секунҷа ба ду тарафи дигари секунҷа мутаносиб буда, кунҷҳои байни ин тарафҳо баробар бошанд, ин секунҷаҳо монанданд.*

Маълум: $\angle A = \angle A_1$ ва $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{A_1B_1}{AB}$.

Матлуб: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

Исбот. Дар расми 56 $AB_2 = A_1B_1$ ва $B_2C_2 \| BC$ мебошад.



Расми 56

Аз $B_2C_2 \parallel BC$ мебарояд, ки $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ аст. Исбот мекунем, ки $\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B$ аст.

Маълум, ки $\Delta ABC \sim \Delta AB_2C_2$. Аз ин ҷо $\frac{AB_2}{AB} = \frac{AC_2}{AC}$.

Азбаски $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{AB_2}{AB}$ мебошад, пас $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{AC_2}{AC}$ ва $A_1C_1 = AC_2$ аст.

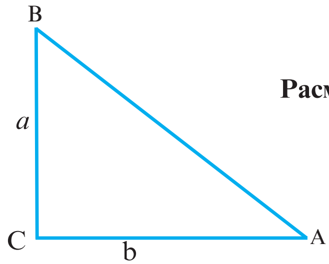
Аз дурустии $\angle A_1 = \angle A$, $A_1B_1 = AB_2$ ва $A_1C_1 = AC_2$ мебарояд, ки $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$ ва $\angle B = \angle B_1 = \angle B_2$ аст.

Дар асоси аломати якуми монандии секунҷаҳо аз $\angle A = \angle A_1$ ва $\angle B = \angle B_1$ бармеояд, ки $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ аст.

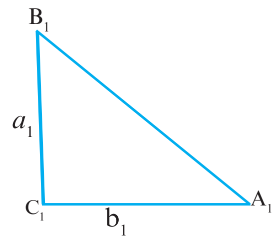
Масъалаи 3. Катетҳои ду секунҷаи росткунҷа мутаносибанд. Исбот кунед, ки ин секунҷаҳои росткунҷа монанданд.

Маълум: $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$ ва $\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1$.

Матлуб: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ **.**



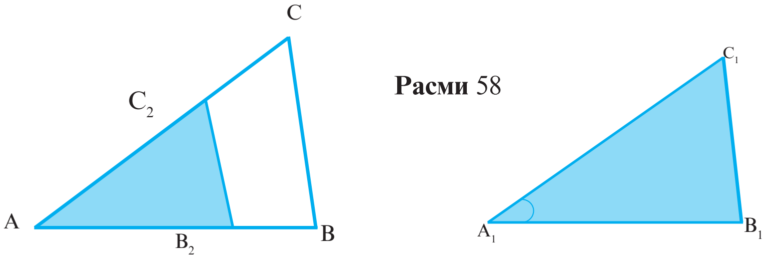
Расми 57



Исбот. Мувофиқи шарт $\angle C_1 = \angle C = 90^0$. Азбаски $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$ ва $\angle C_1 = \angle C$ мебошад, дар асоси аломати дуюми монандии секунҷаҳо навиштан мумкин аст: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

5. Аломати сеюми монандии секунҷаҳо

Теорема. *Агар се тарафи як секунҷа ба се тарафи секунҷаи дигар мутаносиб бошад, ин секунҷаҳо монанданд.*



Расми 58

Маълум: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$.

Матлуб: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

Исбот. Дар расми 58, $AB_2=A_1B_1$ ва $B_2C_2 \parallel BC$ мебошад.

Маълум аст, ки $\Delta AB_2C_2 \sim \Delta ABC$ ва $\frac{AB_2}{AB} = \frac{AC_2}{AC} = \frac{B_2C_2}{BC}$ мебошад.

Аз дурустии $AB_2=A_1B_1$ бармеояд, ки $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{AC_2}{AC} = \frac{B_2C_2}{BC}$ аст.

Аз тарафи дигар, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$ аст.

Аз ду баробарии охирин маълум мешавад, ки $A_1C_1=AC_2$ ва $B_1C_1=B_2C_2$ аст.

Азбаски $AB_2=A_1B_1$, $A_1C_1=AC_2$, $B_1C_1=B_2C_2$ мебошад, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta AB_2C_2$ буда, $\angle A=\angle A_1$ ва $\angle B=\angle B_2=\angle B_1$ мешавад.

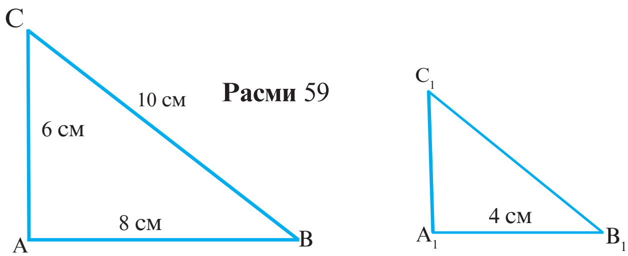
Аз ин ҷо мувофиқи аломати якуми монандии секунҷаҳо навиштан мумкин аст: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

Масъалаи 4. Секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ монанд буда, AB=8 см, BC=10 см, AC=6 см ва A_1B_1=4 см аст. Тарафҳои B_1C_1 ва A_1C_1-ро ёбед.

Маълум: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, AB=8 см ва BC=10 см, AC=6 см, A_1B_1=4 см.

Матлуб: A_1C_1 ва B_1C_1 (расми 59).

Ҳал. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



Расми 59

Аз ин ҷо бармеояд, ки $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = 2$ аст.

(k=2 коэффитсиенти монандӣ мебошад).

Пас, A_1C_1=AC:2=3 см ва B_1C_1=BC:2=5 см.

Ҷавоб: A_1C_1=3 см, B_1C_1=5 см.

Масъалаҳои амалӣ

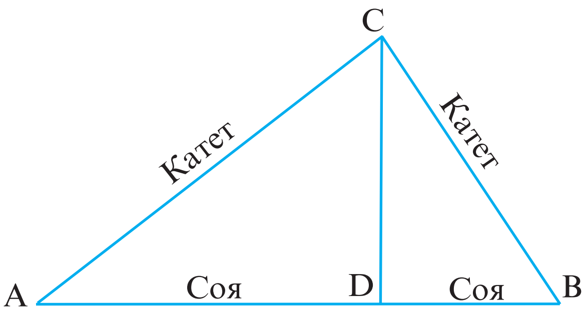
1. Исбот кунед, ки катети секунҷаи росткунҷа мутаносиби миёнаи байни гипотенуза ва сояи он дар гипотенуза мебошад.

Маълум: ABC секунҷаи росткунҷа, $\angle C=90^0$.

Матлуб: $AC = \sqrt{AD \cdot AB}, BC = \sqrt{DB \cdot AB}$.

Исбот. Дар расми 60 сояи катети AC дар гипотенуза порчаи AD аст ва ΔACD секунҷаи росткунҷа мебошад, чунки $\angle ADC=90^0$ аст.

Секунҷаҳои росткунҷаи ABC ва ACD дорои кунҷи тези умумии A мебошанд, аз ин рӯ, $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ мебошад. Аз монандии секунҷаҳои ABC ва ACD бармеояд, ки $AC:AB=AD:AC$ буда, $AC^2=AD \cdot AB$ мебошад. Яъне, AC= $\sqrt{AD \cdot AB}$. Айнан ҳамин тавр, ΔBCD ба ΔABC монанд буда, $BC^2=DB \cdot AB$ ва BC= $\sqrt{DB \cdot AB}$ аст.



Расми 60

2. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC, CD баландии ба гипотенуза фуровардашуда мебошад. Агар AD =2 см, AB=8 см бошад, катетҳои секунҷаи росткунҷаро ёбед.

3. Дар расми 60 аз AC=$\sqrt{AD \cdot AB}$, BC=$\sqrt{DB \cdot AB}$ истифода бурда, теоремаи Пифагорро исбот кунед.

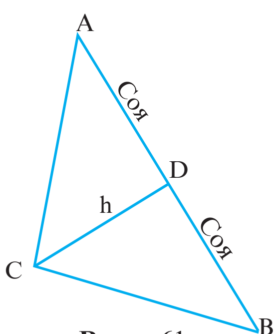
4. Теоремаи зеринро исбот мекунем: квадрати баландии ба гипотенузаи секунҷаи росткунҷа фуровардашуда ба ҳосили зарби қисмҳои гипотенуза, ки онҳоро ин баландӣ ҷудо мекунад, баробар аст.

Маълум: Дар ΔABC, $\angle C=90^0$, $CD=h$.

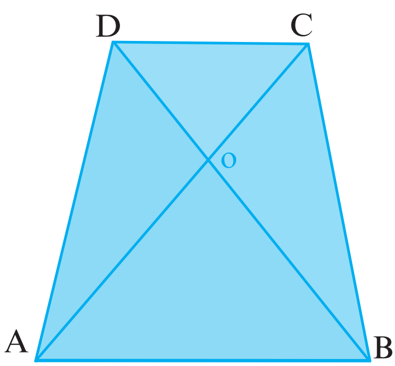
Матлуб: $h=\sqrt{AD \cdot DB}$.

Исбот. $\angle A$ барои секунҷаҳои росткунҷаи ADC ва ABC кунҷи умумӣ мебошад, аз ин ҷо $\Delta ADC \sim \Delta ABC$ аст (расми 61).

$\angle B$ барои секунҷаҳои BCD ва BCA умумӣ буда, $\Delta BCD \sim \Delta BAC$ аст. Аз ин ҷо бармеояд, ки $\Delta ADC \sim \Delta BCD$ аст.



Расми 61



Расми 62

Аз монандии секунҷаҳои ADC ва BCD бармеояд, ки $DC{:}DB=AD{:}DC$, $DC^2=AD\cdot DB$, $DC=\sqrt{AD\cdot DB}$ аст.

5. Дар секунҷаи росткунҷа баландии ба гипотенуза фуровардашуда онро ба қисмҳои 6 см ва 9 см ҷудо мекунад. Ин баландӣ ва катетҳои секунҷаи росткунҷаро ёбед.

6. Дар секунҷаи ABC, A_1B_1 хатти миёна мебошад. Исбот кунед, ки $\Delta CA_1B_1 \sim \Delta CAB$ аст.

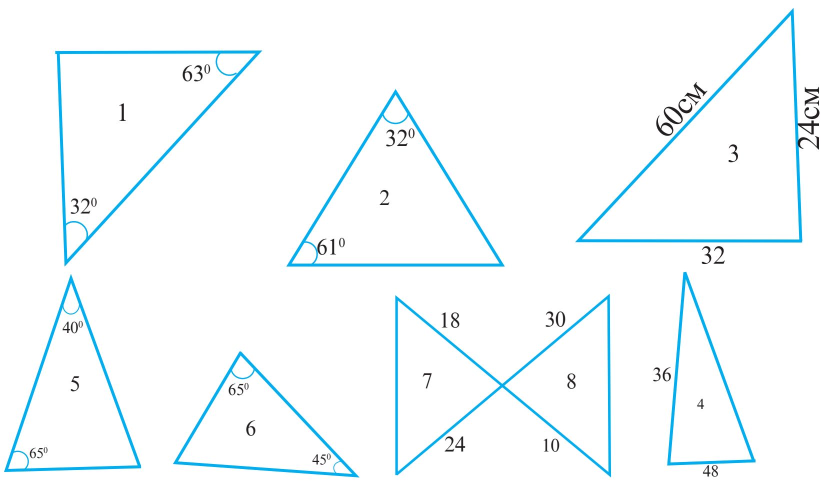
7. Дар секунҷаи ABC нуқтаҳои A_1, B_1, C_1 миёнаҷойи тарафҳо мебошанд. Исбот кунед, ки $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ аст.

8. Дар расми 62 $ABCD$ трапетсия мебошад. Исбот кунед, ки $\Delta OCD \sim \Delta OAB$ мебошад.

9. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ буда, $AB=4$ см, $BC=5$ см, $CA=7$ см ва $A_1B_1{:}AB=2$ мебошад.

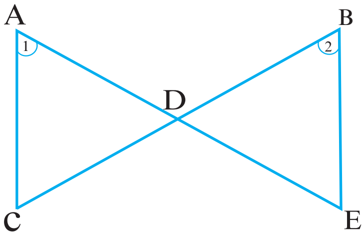
Тарафҳои секунҷаи $A_1B_1C_1$- ро ёбед.

10. Кадоме аз секунҷаҳои дар расми 63 тасвирёфта монанданд. Ҷавобҳоро шарҳ диҳед.



Расми 63

11. Дар расми 64 $\angle 1=\angle 2$ мебошад. Ҷойҳои холии ҷадвалро пур кунед.



	AC	AD	CD	BE	BD
а)	4	8	12		4
б)		5	10	18	
в)	9		15	12	14

Расми 64

12. Порчаи $x=\sqrt{a \cdot b}$ -ро созед, агар a ва b дода шуда бошанд.

Маълум: Порчаҳои a ва b.

Матлуб: $x=\sqrt{a \cdot b}$.

Таҳлил. Аз $x=\sqrt{a \cdot b}$ бармеояд, ки $x^2= a \cdot b$ аст. Агар x баландии секунҷаи росткунҷа бошад, a ва b проексияи катетҳо дар гипотенуза мебошанд.

Низоми сохтан

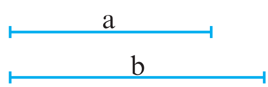
1) Сохтани $AD=a$.

2) Сохтани $DB=b$, $AB=a+b$.

3) Сохтани давраи диаметраш AB.

4) Сохтани $CD \perp AB$.

5) C – буриши CD ва давра.



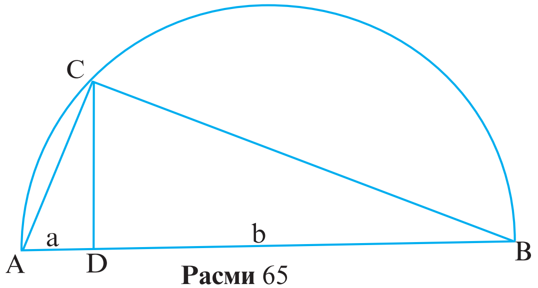
Матлуб: x=CD.

Исбот. ΔABC секунҷаи росткунҷа аст, чунки $\angle$C ба диаметри AB такя мекунад ($\angle C=90^0$) (расми 65). CD баландии секунҷаи росткунҷаи ABC мебошад, аз ин ҷо $CD:a=b:CD$ *ва* $x=\sqrt{a \cdot b}$.

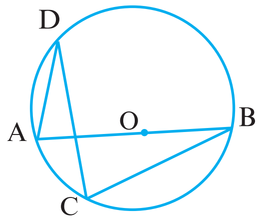
13. Аз рӯйи расми 66 исбот кунед, ки $\Delta ADE \sim \Delta BCE$ аст.

14. Дар расми 66, агар BE=8 см, AD=12 см, $\angle A=60^0$ бошад, AE, DE, EC ва BC-ро ёбед.

15. Дар расми 65, агар a=4 см ва b=16 см бошад, порчаҳои CD, AC ва CB-ро ёбед.



Расми 65



Расми 66

§ 3.4. Гомотетия

1. Мафҳуми гомотетия

Калимаи “гомотетия” ба забони тоҷикӣ маънои монандии марказиро дорад.

Таъриф. *Табдилдиҳии геометрие, ки нуқтаи дилхоҳи X-ро ба нуқтаи* X_1 *дар асоси шарти* $\overrightarrow{OX_1}=k\cdot\overrightarrow{OX}$ *табдил медиҳад, гомотетияи марказаш нуқтаи O ва коэффитсиенташ к номида мешавад*. Дар ин ҷо *к* ягон адади доимӣ аст.

Навишти $\Gamma_0^k(X)=X_1$ маънои зеринро дорад: “гомотетияи марказаш *O* ва коэффитсиенташ *к* нуқтаи *X*-ро ба нуқтаи X_1 табдил медиҳад”.

2. Сохтани шаклҳои гомотетӣ

Масъалаи 1. Маркази гомотетия – нуқтаи *O*, коэффитсиенташ *к* ва нуқтаи *X* дода шудааст. Нуқтаи X_1-и ба нуқтаи *X* гомотетиро созед.

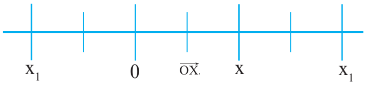
Низоми сохтан:

1) Интихоби нуқтаҳои *O*,*X*.

2) Сохтани хатти рости *OX*.

3) Сохтани $\overrightarrow{OX_1}=k\cdot\overrightarrow{OX}$.

Бигузор, а) $к=3$, *б)* $к=-2$ бошад (расми 67).



Расми 67

Матлуб: $X_1=\Gamma_0^k(X)$.

Масъалаи 2. Маркази гомотетия нуқтаи O, коэффитсиенти гомотетия $к$ ва порчаи AB дода шудааст. Порчаи A_1 ва B_1= Γ_0^k (AB)-ро созед. Исбот кунед, ки хатҳои рости гомотетӣ параллеланд.

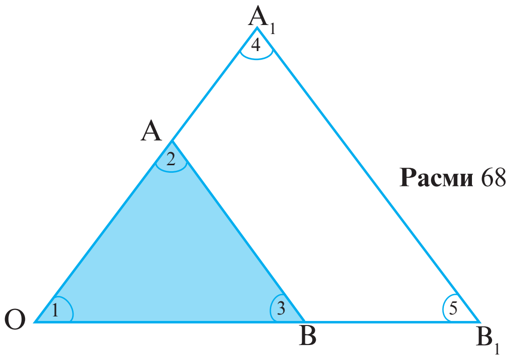
Маълум: O, K ва порчаи AB.

Матлуб: $A_1B_1 = \Gamma_o^k(AB)$.

Низоми сохтан

1. Интихоби нуқтаҳои O, A, B ва AB.
2. Сохтани $A_1 = \Gamma_o^k(A)$.
3. Сохтани $B_1 = \Gamma_o^k(B)$.
4. Сохтани порчаи A_1 B_1.

Матлуб: $A_1B_1 = \Gamma_o^k(AB)$ (расми68).



Расми 68

Исбот мекунем, ки $AB \parallel A_1B_1$ аст. Аз $OA_1 = k \cdot OA$ ва $OB_1 = k \cdot OB$ ва умумӣ будани $\angle O$ бармеояд, ки $\Delta OA_1B_1 \sim \Delta OAB$ мебошад. Аз ин ҷо $\angle 2 = \angle 4$, $\angle 3 = \angle 5$ ва $AB \parallel A_1B_1$ мебошад.

Супориш. 1) Исбот кунед, ки дар ҳолати $к > 2$ будан, гомотетия вектор ва нурро ба вектор ва нури ҳамсамташ табдил медиҳад.

2) Исбот кунед, ки дар ҳолати $k < 0$ будан, гомотетия вектор ва нурро ба вектор ва нури муқобилсамт табдил медиҳад.

3) Исбот кунед, ки дар ҳолати $к = -1$ будан, гомотетия симметрияи марказӣ мебошад.

4) Агар $к = -2$ бошад, Γ_0^k(AB)-ро созед.

Масъалаи 3. ΔABC, нуқтаи O ва коэффитсиенти гомотетия *к* дода шудаанд. $\Gamma_O^k(\Delta ABC)$-ро созед.

Маълум: $O, k, \Delta ABC$.

Матлуб: $\Gamma_O^k(\Delta ABC)$.

Низоми сохтан:

1) Интихоби нуқтаи O ва ΔABC.

2) Сохтани $A_1 = \Gamma_O^k(A)$.

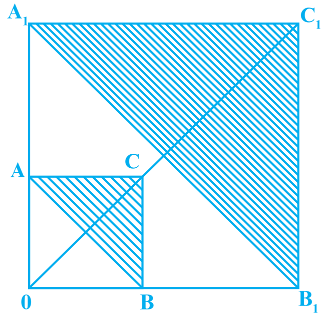
3) Сохтани $B_1 = \Gamma_O^k(B)$.

4) Сохтани $C_1 = \Gamma_O^k(C)$.

5) Сохтани порчаҳои A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1.

Масъалаи 4. Исбот кунед, ки гомотетия табдилдиҳии монандӣ аст, яъне гомотетия фигураи дилхоҳро ба фигураи монандаш табдил медиҳад.

Исбот. Мо исботро дар мисоли секунҷа мегузаронем. Дар расми 69 $\Delta A_1B_1C_1 = \Gamma_O^k(\Delta ABC)$ аст.



Расми 69

Исбот мекунем, ки $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ мебошад. Аз $\Gamma_0^k(AC)=A_1C_1$, $\Gamma_0^k(BC)=B_1C_1$, $\Gamma_0^k(AB)=A_1B_1$ бармеояд, ки $A_1C_1=|k|\ AC$, $B_1C_1=|k|\ BC$, $A_1B_1=|k|\ AB$ буда, $|k|= =A_1C_1:AC=B_1C_1:BC=A_1B_1:AB$ мебошад.

Мувофиқи аломати сеюми монандии секунҷаҳо $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ аст.

Супориш. 1) Масъалаи 3-ро дар мавриди *к*=-*2* будан ҳал намоед.

2) Квадрати *ABCD* дода шудааст. $\Gamma_O^k(ABCD)$-ро ичро намоед. Исбот кунед, ки фигураи ҳосилшуда ба квадрати *ABCD* монанд аст.

3. Хосиятҳои гомотетия

1) Гомотетия нуқтаи дилхоҳро ба ягон нуқтаи дигар табдил медиҳад.

2) Гомотетия маркази гомотетияро ба худаш табдил медиҳад.

3) Гомотетия хатти рости аз марказ гузарандаро ба худаш табдил медиҳад.

4) Гомотетия хатти ростро ба хатти рости дигар, порчаро ба порчаи дигар ва нурро ба нури дигар табдил медиҳад.

5) Гомотетия хатти рости аз марказ нагузарандаро ба хатти рости ба он параллел табдил медиҳад.

6) Гомотетия тартиби нуқтаҳои хатти ростро нигоҳ медорад.

7) Гомотетия бузургии кунҷро тағйир намедиҳад.

8) Гомотетия параллелии хатҳои ростро нигоҳ медорад.

9) Гомотетия табдилдиҳии монандӣ аст.

10) Гомотетия фигураи дилхоҳро ба фигураи ба он монанд табдил медиҳад.

Супоришҳо. 1) Кунҷи α дода шудааст. $\Gamma_0^k(\alpha)=\alpha_1$-ро созед. Исбот кунед, ки $\alpha=\alpha_1$ аст.

2) $a \parallel b$ мебошад. $\Gamma_0^3(a \parallel b)$-ро сохта, хатҳои рости a_1 ва b_1-ро ҳосил кунед. Исбот кунед, ки $a_1 \parallel b_1$ аст.

3) Нуқтаи A дар порчаи BC мехобад. $\Gamma_0^3(A)$, $\Gamma_0^3(BC)$-ро сохта, нуқтаҳои A_1, B_1, C_1-ро ҳосил кунед. Исбот кунед, ки нуқтаи A_1 дар порчаи $B_1 C_1$ мехобад.

4) Давраи марказаш O ва радиусаш R дода шудааст. $\Gamma_0^k[O(R)]$-ро созед.

5) Нуқтаи A дар давраи $O\ (R)$ мехобад. $\Gamma_0^k[O(R)]$-ро созед. Исбот кунед, ки ҳар ду давра расандаанд.

Масъалаҳо

1. Секунҷаи ABC-и тарафҳояш AB=5см, BC=3см ва AC=4см дода шудааст. $\Gamma_0^3 \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_1B_1C_1(ABC) = \triangle$ $A_1B_1C_1$-ро созед. Тарафҳои $A_1B_1C_1$-ро ёбед.

2. Шашкунҷаи мунтазами $ABCDEM$-ро созед, ки тарафаш 4см бошад. Агар а)k=2; б)k=0,5 буда, O-маркази давраи берункашида бошад $A_1B_1C_1D_1E_1M_1 = \Gamma_0^k(ABCDEM)$-ро созед. Тарафи A_1B_1-ро ёбед.

3. Параллелограмми $ABCD$-ро созед, ки дар он AB=6см ва AD=8см бошад. $A_1B_1C_1D_1 = \Gamma_O^k(ABCD)$-ро сохта, периметри чоркунҷаи $A_1B_1C_1D_1$-ро ҳангоми а) k=2, б) k=-2, в) $k=\frac{1}{2}$ будан ёбед.

4. Росткунҷаи $ABCD$-ро созед, ки тарафҳояш $AB=3$см, AD=4см бошад. Нуқтаи O-нуқтаи буриши диагоналҳо мебошад. $\Gamma_O^{2.5}(ABCD)$-ро сохта, периметр ва масоҳати фигураи ҳосилшударо ҳисоб кунед.

5. Давраи O (r) ва нуқтаи M дар ин давра дода шудааст. $\Gamma_м^k[0\,(r)]$-ро созед, агар: а) k=-3; б) k=3; в) k=-2 бошад.

6. Давраи O (r) ва нуқтаи M дар беруни давра дода шудааст. $\Gamma_м^k[0\,(r)]$-ро созед, агар: а) k=2; б) k=-2 ва OM=2r бошад.

7. Гомотетия нуқтаи X-ро ба X_1 ва нуқтаиY-ро ба Y_1 табдил медиҳад. Агар нуқтаҳои X, Y ва X_1, Y_1 маълум бошанд, маркази гомотетияро ёбед.

8. Исбот кунед, ки нисбати периметрҳои фигураҳои гомотетӣ ба бузургии мутлақи коэффитсиенти гомотетия баробар аст.

9. Исбот кунед, ки нисбати масоҳатҳои фигураҳои гомотетӣ ба квадрати коэффитсиенти гомотетия баробар аст.

10. Исбот кунед, ки агар $\Gamma_O^k(\Phi)=\Phi_1$ ва $\Gamma_O^n(\Phi_1)=\Phi_2$ бошад, $\Gamma_O^{k\cdot n}(\Phi)=\Phi_2$ аст.

Савол ва супоришҳо барои санҷиш

1. Нисбати порчаҳо чӣ маъно дорад?

2. Чӣ гуна порчаҳоро мутаносиб меноманд?

3. Теоремаро дар бораи хатҳои рости параллели бурандаи тарафҳои кунҷ баён кунед.

4. Порчаи $x=\dfrac{b\cdot c}{a}$ чӣ гуна сохта мешавад?

5. Чӣ гуна фигураҳоро монанд меноманд?

6. Табдилдиҳии монандиро баён кунед.

7. Таърифи секунҷаҳои монандро баён намоед.

8. Аломатҳои монандии секунҷаро баён намоед.

9. Хосиятҳои монандиро номбар кунед.

10. Гомотетия чист?

11. Сохтани бисёркунҷаҳои гомотетиро шарҳ диҳед.

12. Хосиятҳои гомотетияро баён кунед.

13. Кадом хосиятҳои табдилдиҳиҳо ҳам барои монандӣ ва ҳам барои ҳаракат иҷро мешаванд?

14. Кадом хосиятҳои ҳаракат барои гомотетия ва монандӣ ҷой надоранд?

15. Кадом хосиятҳои секунҷаи росткунҷа ба воситаи истифодаи мафҳуми монандӣ исбот карда мешаванд?

16. Аз монандии секунҷаҳои росткунҷа истифода бурда, теоремаи Пифагорро исбот намоед.

17. Аломатҳои монандии секунҷаҳои росткунҷаро баён намоед.

18. Порчаи $x=\sqrt{a\cdot b}$ -ро чӣ тавр месозанд?

19. Гомотетия аз монандӣ чӣ фарқ дорад?

20. Кадом вақт гомотетия симметрияи марказӣ мешавад?

21. Оё фигураҳои нисбат ба тир симметрӣ монанд шуда метавонанд?

22. Периметрҳои бисёркунҷаҳои монанд ва коэффитсиенти монандӣ чӣ гуна вобастагӣ доранд?

23. Масоҳатҳои бисёркунҷаҳои монанд ва коэффитсиенти монандӣ чӣ гуна вобастагӣ доранд?

24. Исбот кунед, ки шаклҳои гомотетӣ бо ҳам монананд.

ФАСЛИ IV. ТАТБИҚИ МОНАНДӢ, ГОМОТЕТИЯ ВА МЕТОДИ КООРДИНАТАҲО

§ 4.1. Хосияти биссектрисаи секунҷа

Теорема. *Биссектрисаи кунҷи дарунии секунҷа тарафи муқобилро ба порчаҳое ҷудо мекунад, ки ба тарафҳои ба онҳо часпида мутаносибанд.*

Маълум: ΔABC, AD – биссектрисаи кунҷи A.

Матлуб: $BD:AB=DC:AC$.

Исбот. Дар расми 70: $CE \| DA$.

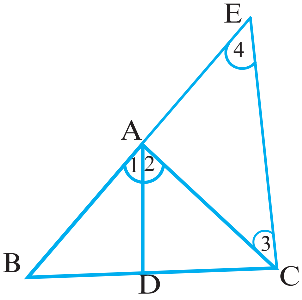
Аз ин ҷо мебарояд, ки $\angle 4=\angle 1$ ва $\angle 3=\angle 2$ аст. Маълум, ки $\angle 1=\angle 2$ аст. Аз дурустии $\angle 4=\angle 1$, $\angle 1=\angle 2$ ва $\angle 3=\angle 2$ бармеояд, ки $\angle 3=\angle 4$ буда, ΔACE баробарпаҳлу аст, яъне $AC=AE$. $AB:AE=BD:DC$, $AE=AC$ мебошад, бинобар ин $AB:AC= =BD:DC$ мешавад. Инак, $BD:AB=DC:AC$.

Масъалаи 1. Биссектрисаи кунҷи A-и секунҷаи ABC баландии BD-ро дар нуқтаи O мебурад. Агар $\angle A=60^0$ бошад, $OD:OB$-ро ёбед.

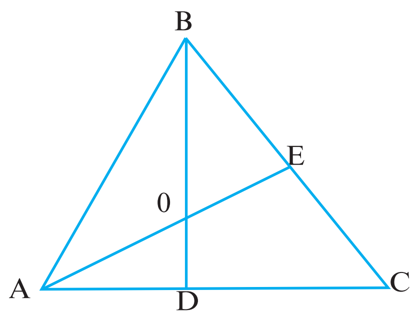
Маълум: $BD \perp AC$, $\angle A=60^0$, AO-биссектриса.

Матлуб: BO:OD

Ҳал. Дар расми 71 AO биссектрисаи кунҷи BAD аст.



Расми 70



Расми 71

Аз ин ҷо $AB:AD=BO:OD$. ΔABD секунҷаи росткунҷа мебошад.

Пас, $\angle B=90^0-\angle A=90^0-60^0=30^0$ ва $AD=\frac{1}{2}\cdot AB$ ё $AB=2AD$.

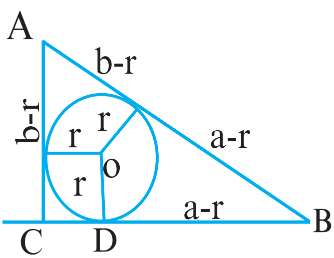
BO:OD=AB:AD=2AD:AD=2:1, яъне BO:OD=2:1 ё OD: OB=1:2 аст.

Теорема. *Нуқтаи буриши биссектрисаҳои кунҷҳои даруннии секунҷа маркази давраи дарункашида аст.*

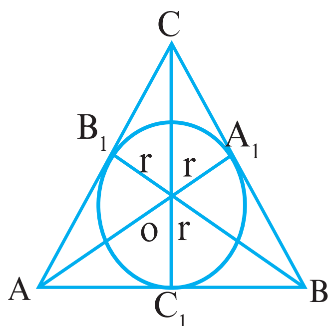
Исботи ин теорема ба шумо ҳавола карда мешавад.

Масъалаи 2. *a,b* – катетҳо, *c* – гипотенуза ва *r* – радиуси давраи дарункашидаи секунҷаи росткунҷа аст. Исбот кунед, ки $r=\frac{a+b-c}{2}$ мебошад.

Нишондод. Ҳалро мувофиқи расми 72 иҷро намоед.



Расми 72



Расми 73

Масъалаи 3. Агар *a,b,c* – тарафҳои секунҷа буда, *r* радиуси давраи дарункашида бошад, исбот кунед, ки $r=\frac{2S}{a+b+c}$ ё $S=\frac{a+b+c}{2}\cdot r=p\cdot r$ мебошад.

Низоми ҳал

Маълум ва матлубро аз рӯйи расми 73 муқаррар кунед.

1) Масоҳати ΔAOB-ро ёбед.

2) Масоҳати ΔAOC-ро ёбед.

3) Масоҳати ΔBOC-ро ёбед.

4) Ҳар се масоҳатро ҷамъ намоед. Он гоҳ масоҳати секунҷаи ABC-ро ҳосил мекунед.

5) Аз формулаи ҳосилшуда r-ро ёбед.

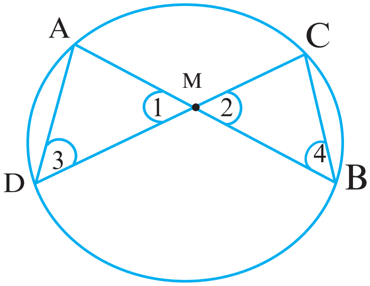
§ 4.2. Хосияти хордаҳои дар як нуқта буранда

Теорема. *Агар ду хордаи давра дар як нуқта ҳамдигарро буранд, ҳосили зарби порчаҳои хордаҳо бо ҳам баробаранд.*

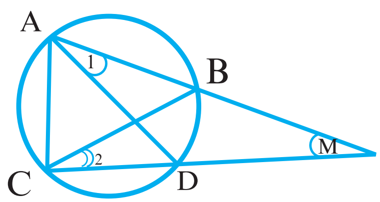
Маълум: AB ва CD хордаҳои дар нуқтаи M буранда.

Матлуб: $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

Исбот. Дар расми 74 $\angle 1$ ва $\angle 2$ ҳамчун кунҷҳои амудӣ баробаранд: $\angle 1 = \angle 2$. Кунҷҳои 3 ва 4 ба камони AC такя мекунанд, аз ин рӯ $\angle 3 = \angle 4$ мебошад.



Расми 74



Расми 75

Азбаски $\angle 1 = \angle 2$ ва $\angle 3 = \angle 4$ аст, пас $\Delta AMD \sim \Delta CMD$ буда, $MD:MB = AM:CM$ мебошад. Аз ин ҷо $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ аст.

Масъалаи 1. Дар расми 74, CM = 4 см ва MD=18 см аст. Агар $AM:MB$=1:2 бошад, дарозии хордаи AB-ро ёбед.

2. Хосияти ду бурандаи аз як нуқта ба давра гузаронидашуда

Теорема. *Агар аз як нуқта ба давра ду буранда гузаронида шуда бошанд, ҳосили зарби бурандаҳо ва қисми берунияшон ба ҳам баробаранд.*

Маълум: MA ва MC– бурандаҳо, MB ва MD – қисмҳои берунӣ.

Матлуб: $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

Исбот. Кунҷҳои 1 ва 2 ба камони BD такя мекунанд, аз ин рӯ, $\angle 1=\angle 2$ мебошад (расми 75). Аз тарафи дигар, $\angle M$ барои секунҷаҳои MAD ва MCB кунҷи умумӣ мебошад. Аз ин бармеояд, ки $\Delta AMD \sim \Delta CMB$ буда, $AM:MC=DM:BM$ мебошад. Аз ин ҷо $AM \cdot BM=MC \cdot DM$ аст.

Масъалаи 2. Дар расми 75 AM-ро ёбед, агар $BM=3$ см, $MC=15$ см ва $DM=5$ см бошад.

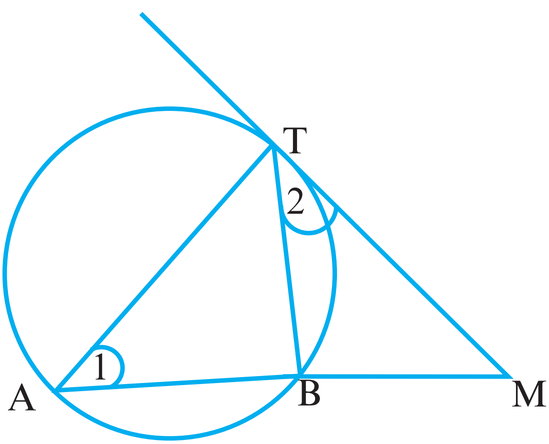
Теорема. *Агар аз як нуқта ба давра буранда ва расанда гузаронида шуда бошад, ҳосили зарби буранда ва қисми беруниаш ба квадрати масофаи байни нуқтаи расиш баробар аст.*

Маълум: MT – расанда, AM – буранда, BM – қисми берунӣ.

Матлуб: $MT^2=AM \cdot BM$.

Исбот. Дар расми 76 $\angle 1=\frac{1}{2}\overset{\frown}{TB}$ ва $\angle 2=\frac{1}{2}\overset{\frown}{TB}$ аст, аз ин ҷо $\angle 1=\angle 2$ бармеояд. Пас, $\Delta ATM \sim \Delta TBM$ буда, $AM:TM=$ $=TM:BM$ мебошад. Инак, $TM^2=AM \cdot BM$.

Масъалаи 3. Дар расми 76 AB=20 см, BM=5 см мебошад. TM-ро ёбед.

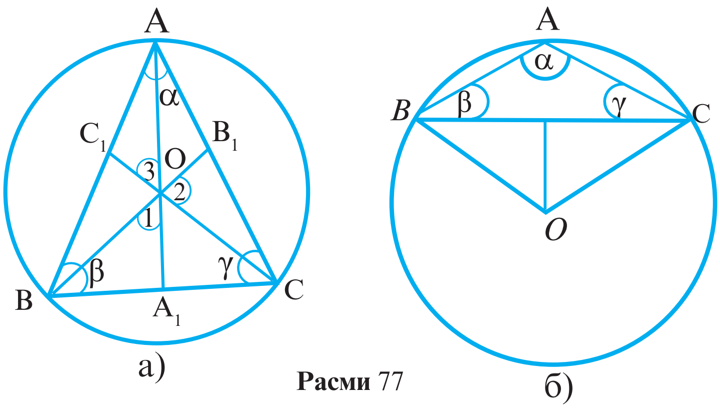


Расми 76

§ 4.3. Теоремаи синусҳо

1. Теоремаи синусҳо

Теорема. *Тарафҳои секунҷа ба синуси кунҷҳои муқобилхобида мутаносибанд.*



Расми 77

Маълум: BC=a, AB=c, AC=b, $\angle$A=α, $\angle$B=β, $\angle C$=γ.

Матлуб: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

Исбот. Дар расми 77 (а), $\angle A = \frac{1}{2}\cdot\overset{\smile}{BC}$ ва $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\cdot\overset{\smile}{BC}$ буда, $\angle 1 = \angle A = \alpha$ мебошад.

Аз ΔA_1OB ва $A_1B = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}$ ҳосил мекунем:

$A_1B = OB\cdot\sin\angle 1 = R\cdot\sin\alpha$; $\frac{a}{2} = R\cdot\sin\alpha$, $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

Айнан ҳамин тавр, $\angle 2 = \beta$, $\angle 3 = \gamma$ буда, $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$ ва $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ мешавад.

Аз $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R, \dfrac{b}{\sin\beta} = 2R, \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$ мебароянд, ки

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \text{ аст.}$$

Масъалаи 1. Дар секунҷаи *ABC* кунҷи α-ро ёбед, агар a=R=5 см бошад.

2. Радиуси давраи берункашида

Масъалаи 2. Исбот кунед, ки дар секунҷаи тарафҳояш *a, b, c* ва масоҳаташ S буда, $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$ ё $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$ аст. *R*-радиуси давраи берункашида.

Маълум: ΔABC, *a,b,c* ва S.

Матлуб: $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$.

Исбот. Ба мо маълум аст, ки $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ мебошад, аз ин ҷо $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$ аст.

Сурат ва махраҷи касрро ба *bc* зарб мекунем: $R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2bc \cdot \sin\alpha}$.

Азбаски $S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha$ мебошад, $bc\cdot\sin\alpha=2S$ буда, $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot 2S} = \frac{abc}{4S}$ аст.

Ҳамин тариқ, $R = \frac{abc}{4S}$ ё $S = \frac{abc}{4R}$ мебошад.

Масъалаи 3. Дар секунҷаи баробарпаҳлу $a=b=5$ см аст. Радиуси давраи берункашидаро ёбед.

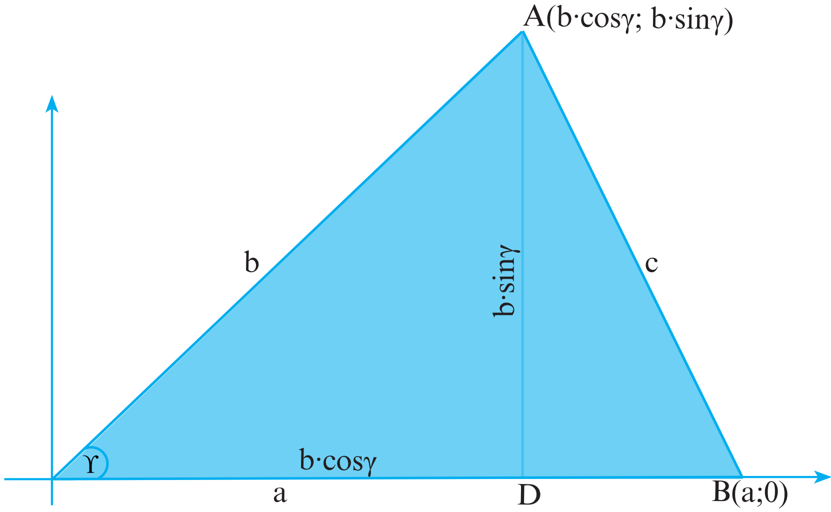
§ 4.4. Теоремаи косинусҳо

Теорема. *Квадрати тарафи дилхоҳи секунҷа ба суммаи квадратҳои ду тарафи дигар, бе дучандкардашудаи ҳосили зарби ин тарафҳо ба косинуси кунҷи байни онҳо баробар аст.*

Маълум: $CA=b$, $CB=a$, $AB=c$.

Матлуб: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$.

Исбот. Дар расми 78 нуқтаҳои *A* ва *B* бо координатаҳояшон дода шудааст.



Расми 78

Маълум аст, ки $AB^2=c^2$ мебошад. Аз ин ҷо

$c^2=AB^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2=(b\cos\gamma-a)^2+(b\sin\gamma-0)^2=b^2\cos^2\gamma-$
$-2ab\cos\gamma+a^2+b^2\sin^2\gamma=a^2+b^2(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma)-2ab\cos\gamma=a^2+b^2-$
$-2ab\cos\gamma$.

Яъне, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$.

Теоремаи косинусҳоро барои тарафҳои дигари секунҷа ин тавр навиштан мумкин аст: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$;

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$.

Тарзи дигари исботи теоремаи косинусҳо

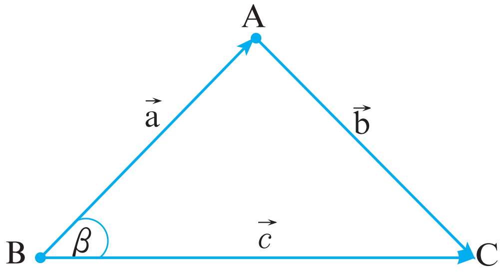
Маълум: $|\vec{c}|=c, |\vec{b}|=b, |\vec{a}|=a, \angle B=\beta$.

Матлуб: $b^2=a^2+c^2-2a\cdot\cos\beta$.

Исбот. Дар расми 79 $\vec{a}=\vec{c}+\vec{b}$, аз ин ҷо $\vec{b}=\vec{a}-\vec{c}$. Ҳар ду тарафи баробариро ба квадрат бардошта, ҳосил мекунем:

$\vec{b}^2=(\vec{a}-\vec{c})^2=\vec{a}^2+\vec{c}^2-\overrightarrow{2ac}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=ac\cos\beta$.

Теоремаи косинусҳоро барои мавриди $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ исбот намоед.



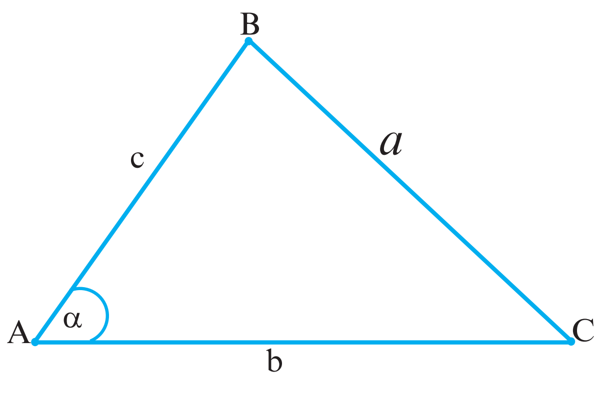
Расми 79

Супориш. 1) Дар ҳолати γ=90⁰ будан теоремаи Пифагор-ро аз теоремаи косинусҳо ҳосил намоед.

2) Дар секунҷаи *ABC, AB*=5 см, BC=3 см, AC=4 см мебошад. Бузургии $\angle$C-ро ёбед.

§ 4.5. Формулаи Герон

Теорема. *Масоҳати секунҷа ба* $S=\sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)}$ *баробар аст, агар a,b, c – тарафҳо ва* $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ *бошад (расми 80).*



Расми 80

Исбот. Маълум аст, ки $S=\dfrac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha$ мебошад. Аз теоремаи косинусҳо истифода бурда, меёбем: $\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha))=\left(1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$x

x$\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\dfrac{(a^2-(b^2+c^2-2bc))((b^2+c^2+2bc)-a^2}{4b^2c^2}$;

$a^2-(b^2+c^2-2bc)=a^2-(b-c)^2=(a+c-b)(a+b-c)$,

$(b^2+c^2+2bc)-a^2=(b+c)^2-a^2=(a+b+c)(b+c-a)$,

$a+b+c=2$р, $a+b-c=(a+b+c)-2c=2$р$-2c=2($р$-c)$,

$a+c-b=(a+b+c)-2b=2$р$-2b=2($р$-b)$,

$b+c-a=(a+b+c)-2a=2$р$-2a=2($р$-a)$.

Аз ин ҷо: $\sin^2\alpha=\dfrac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4b^2c^2}=$

$=\dfrac{2p\cdot2(p-a)\cdot2(p-b)\cdot2(p-c)}{4b^2c^2}=\dfrac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$.

Ифодаи $p(p-a)(p-b)(p-c)$-ро меёбем:

$\dfrac{1}{4}b^2\cdot c^2\cdot\sin^2\alpha=p(p-a)(p-b)(p-\text{c})$;

$\dfrac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin\alpha=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

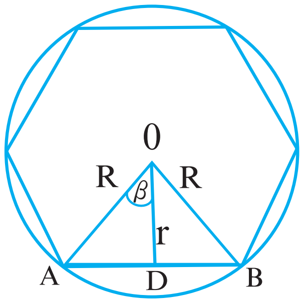
Аз он ки $S=\dfrac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin\alpha$ мебошад, бинобар ин $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ мешавад.

Масъала. Масоҳати секунҷаро ёбед, агар тарафҳояш ба: а) 13см, 14см, 15см; б) 5 см, 6 см, 7 см ; в) 17 м, 65 м, 80 м баробар бошад.

§ 4.6. Ифода кардани тараф ва масоҳати n-кунҷаи мунтазам ба воситаи радиусҳои давраҳои дарун ва берункашида

Бигузор a_n тарафи n – кунҷаи мунтазам, R радиуси давраи берункашида ва r радиуси давраи дарункашида бошад (расми 81).

$$1)\beta = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\cdot\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{2}\cdot\frac{360^0}{n} = \frac{180^0}{n}.$$



Расми 81

Аз ΔAOD ҳосил мекунем:

$$a_n = 2\cdot AD = 2\cdot R\cdot\sin\frac{180^0}{n};\ a_n = 2\cdot AD = 2\cdot r\cdot tg\frac{180^0}{n}.$$

Инак, $a_n = 2\cdot AD = 2\cdot R\cdot\sin\frac{180^0}{n}$ ва $a_n = 2\cdot AD = 2\cdot r\cdot tg\frac{180^0}{n}$.

Аз ΔAOD: $r = R\cos\frac{180^0}{n}$.

$$S_n = \frac{1}{2}n\cdot a_n r = \frac{1}{2}n\cdot 2R\sin\frac{180^0}{n}\cdot R\cos\frac{180^0}{n} = \frac{1}{2}n\cdot R^2\sin\frac{360^0}{n};$$

$$S_n = \frac{1}{2}n\cdot 2rtg\frac{180^0}{n}\cdot n;\ S_n = nr^2 tg\frac{180^0}{n}.$$

Инак, $S_n = \frac{1}{2}nR^2\sin\frac{360^0}{n} = nr^2\cdot tg\frac{180^0}{n}$.

2) Барои секунҷаи мунтазам: $n = 3$.

$$a = 2R\sin\frac{180^0}{3} = 2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3},\ \text{яъне}\ a = R\sqrt{3}.$$

$a = 2rtg\dfrac{180^0}{3} = 2r \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \bullet r$;

$a = R \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\, r;\ R = 2r;$

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot R^2 \sin\dfrac{180^0}{3} = \dfrac{3}{2} R^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} R^2;$

яъне, S= $\dfrac{3\sqrt{3}}{4} R^2$;

$S = 3r^2 \cdot tg\dfrac{180^0}{3} = 3r^2\sqrt{3};\ \ S = 3\sqrt{3} \cdot r^2$, яъне $S = 3\sqrt{3} \cdot r^2$.

Ҳамин тариқ, дар секунҷаи мунтазам (баробартараф):

$R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}; r = \dfrac{a}{2\sqrt{3}};\ R = 2r; S = \dfrac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} R^2 = 3\sqrt{3}\, r^2.$

3) Барои чоркунҷаи мунтазам (квадрат): n=4.

$a = 2 \cdot R \cdot \sin\dfrac{180^0}{4} = 2R \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\, R$. Яъне $a = \sqrt{2}\, R$.

$a=2r \cdot \text{tg}\dfrac{180^0}{4}=2r$, яъне $a=2r$.

$a = \sqrt{2}\, R=2r$. Яъне $R= \sqrt{2}\, r$.

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot R^2 \sin\dfrac{360^0}{4} = 2R^2 \cdot 1 = 2R^2$, яъне $S=2R^2$.

$S=4 \cdot r^2 \cdot \text{tg}\dfrac{180^0}{4}=4r^2 \cdot 1=4r^2$, яъне S=$4r^2$.

Ҳамин тариқ, дар чоркунҷаи мунтазам (квадрат):

$R = \dfrac{a}{\sqrt{2}}, r = \dfrac{a}{2}, S = a^2 = 2R^2 = 4r^2, R = \sqrt{2}\, r.$

4)Барои шашкунҷаи мунтазам:

$a = 2 \cdot R \cdot \sin\dfrac{180^0}{6} = 2R \cdot \dfrac{1}{2} = R$, яъне $a=R$;

$a = 2r \cdot tg\dfrac{180^0}{6} 2r \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}\ a = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$, яъне $a = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$;

$$a = R = \frac{2r}{\sqrt{3}};\ r = \frac{\sqrt{3}}{2}R;$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot R^2\cdot \sin\frac{360^0}{6} = 3R^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\text{, яъне } S = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,R^2;$$

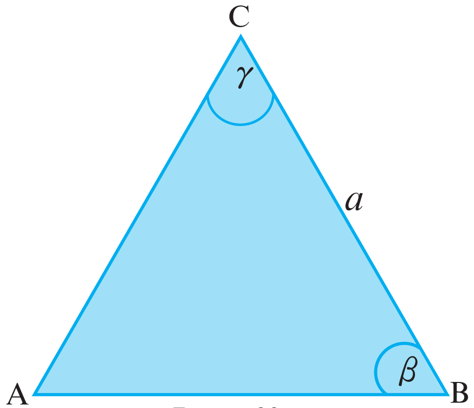
$$S = 6\cdot r^2\cdot tg\frac{180^0}{6} = 6r^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}\,r^2;\ \ S = 2\sqrt{3}\,r^2.$$

Ҳамин тариқ, дар шашкунҷаи мунтазам:

$$R = a, r = \frac{\sqrt{3}}{2}R, S = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2 = 2\sqrt{3}\,r^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

§ 4.7. Ҳалли секунҷаҳо

Масъалаи 1. Дар секунҷа $BC=a$, $\angle B=\beta$ ва $\angle C=\gamma$ дода шудаанд. $\angle A, AB, AC$, P ва S-ро ёбед (Расми 82).



Расми 82

Ҳал. 1) $\angle A=180^0-(\angle B+\angle C)=180^0-(\beta+\gamma)$.

$$2)\ \frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{BC}{\sin\alpha},\ \ AB = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin(180^0 - (\beta+\gamma))} = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

$$3)\ \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha},\ \ AC = \frac{a\cdot\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

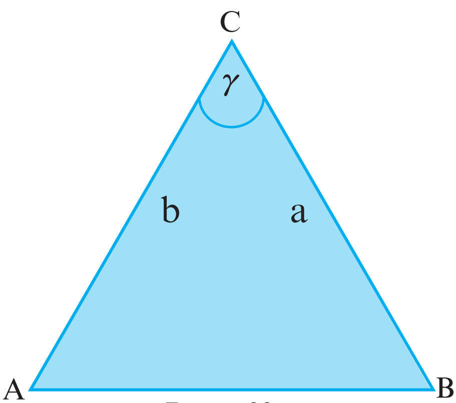
$$4)\ P = AB + BC + AC = \frac{a\sin\gamma + a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)} + a.$$

$$5)\ S = \frac{1}{2}BC\cdot AC\sin\gamma = \frac{1}{2}a\cdot\frac{a\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{a^2\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}.$$

Масъалаи 2). Маълум: $\Delta ABC,\ BC=a,\ AC=b, \angle C=\gamma$.
Матлуб: AB, $\angle$A, $\angle$B, P ва S (Расми 83).

Ҳал: $1)\ AB = \sqrt{BC^2 + AC^2 - 2BC\cdot AC\cos\gamma} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma};$

$$2)\ \cos\angle A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AC\cdot AB} = \frac{AB^2 + b^2 - a^2}{2\cdot b\cdot AB};$$



Расми 83

3) $\angle$B=180^0-($\angle$A+$\angle$C)=180^0-($\angle$A+γ);

4) P=AB+BC+AC=AB+a+b;

5) $S = \frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\gamma$.

Масъалаи 3). Маълум: $\Delta ABC, BC=a,\ AC=b,\ AB=c.$
Матлуб: $\angle$A, $\angle$B, P ва S (расми 84).
Ҳал: 1) P=BC+AC+AB=a+b+c;

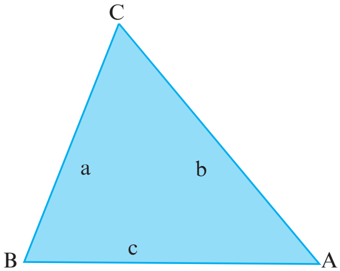
$$p_1 = \frac{a+b+c}{2};$$

$$2)\; S = \sqrt{p_1(p_1 - a)(p_1 - b)(p_1 - c)};$$

$$3)\; \cos\angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$4)\; \cos\angle B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$5)\; \angle C = 180^0 - (\angle A + \angle B).$$



Расми 84

Масъалаҳо

1. Дар секунҷа як тараф ва ду кунҷ дода шудаанд. Элементҳои дигари секунҷаро ёбед, агар:

1) $a = 5, \beta = 50^0, \gamma = 45^0$; 4) $b = 12, \alpha = 36^0, \beta = 25^0$;

2) $a = 30, \alpha = 75^0, \beta = 60^0$; 5) $c = 14, \alpha = 64^0, \beta = 48^0$

3) $a = 35, \beta = 40^0, \gamma = 120^0$; 6) $a = 3, \beta = 90^0, \gamma = 90^0$ бошад.

2. Ду тараф ва яке аз кунҷҳои секунҷа дода шудаанд. Элементҳои боқимондаи секунҷаро ёбед, агар:

1) $a = 12, b = 8, \alpha = 60^0$; 4) $a = 12, b = 5, \alpha = 120^0$;

2) $a = 7, b = 33, \alpha = 130^0$; 5) $a = 2, b = 4, \alpha = 60^0$;

3) $b = 9, c = 7, \alpha = 95^0$; 6) $\mathrm{b} = 24, \mathrm{c} = 18, \beta = 15^0$ бошад.

3. Се тарафи секунҷа дода шудааст. Элементҳои боқимондаи секунҷаро ёбед:

1) $a = 12, \mathrm{b} = 3, \mathrm{c} = 4$; 4) $a = 15, b = 24, c = 18$;

2) $a = 7, b = 2, c = 8$; 5) $a = 3, b = 4, \mathrm{c} = 5$;

3) $a = 4, b = 5, c = 7$; 6) $a = 8, b = 6, \mathrm{c} = 10$.

4. Тарафҳои секунҷа 5 м, 6 м ва 7 м мебошанд. Косинуси кунҷҳои секунҷа, масоҳат ва радиусҳои давраҳои дарун ва берункашидаро ёбед.

5. Дар секунҷа ду тараф 5 м ва 6 м буда, синуси кунҷи байнашон ба 0,6 баробар мебошад. Элементҳои боқимондаи секунҷаро ёбед.

6. Масоҳати секунҷаро ёбед, агар тарафи a ва кунҷҳои ба он часпидаи β ва γ маълум бошанд.

7. Радиусҳои давраҳои дарун ва берункашидаи секунҷаро ёбед, агар тарафҳояш: а) 13, 14, 15; б) 15, 13, 12; в) 35, 29, 8; г) 4,5,7 бошанд.

8. Тарафи паҳлуии секунҷаи баробарпаҳлу 6 см буда, баландии ба асос фуровардашудааш 4 см аст. Радиуси давраи берункашидаро ёбед.

9. Радиуси давраи дар атрофи секунҷаи баробарпаҳлуи берункашидаро ёбед, агар асосаш a ва тарафи паҳлуияш b бошад.

10. Катетҳои секунҷаи росткунҷа 40 см ва 42 см мебошанд. Радиусҳои давраҳои дарун ва берункашидаро ёбед.

11. Баландии хурди секунҷаи тарафҳояш: а) 5, 5, 6; б)17, 65, 80-ро ёбед.

12. Баландии калони секунҷаро ёбед, агар тарафҳояш

$a)\ \frac{25}{6},\quad \frac{29}{6}, 6;\qquad b)\ 13,\quad 37\frac{12}{13},\quad 47\frac{1}{13}$ бошанд.

13. Баландиҳои секунҷаро ёбед, агар тарафҳояш 13 см, 14 см ва 15 см бошанд.

14. Исбот кунед, ки дар секунҷа $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ мебошад, агар r – радиуси давраи дарункашида ва h_a, h_b, h_c баландиҳо бошанд.

15. Исбот кунед, ки тарафҳои секунҷа ва баландиҳояш мутаносиби чаппа мебошанд. Яъне, $a:b:c = \frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}$.

Савол ва супоришҳо барои санҷиш

1. Хосияти биссектрисаи секунҷаро баён намоед.
2. Хосияти хордаҳои буранда чӣ гуна аст?
3. Хосияти бурандаҳои давраро исбот кунед.

4. Теоремаи синусҳоро исбот кунед.

5. Теоремаи косинусҳоро исбот кунед.

6. Доир ба масоҳати секунҷа кадом формулаҳоро медонед?

7. Формулаи Геронро нависед.

8. Тарафи n – кунҷаи дар давра берункашидаро чӣ тавр меёбанд?

9. Тарафи шашкунҷаи мунтазамро ба воситаи радиусҳои давраҳои дарун ва берункашида нависед.

10. Доир ба ҳалли секунҷаҳо кадом формулаҳоро медонед?

11. Барои ёфтани кунҷҳо ва тарафҳои секунҷа муайян будани чанд элементи он зарур мебошад?

ФАСЛИ V. ДАРОЗИИ ДАВРА ВА МАСОҲАТИ ДОИРА

§ 5.1. Дарозии давра ва камон

1. Дарозии давра

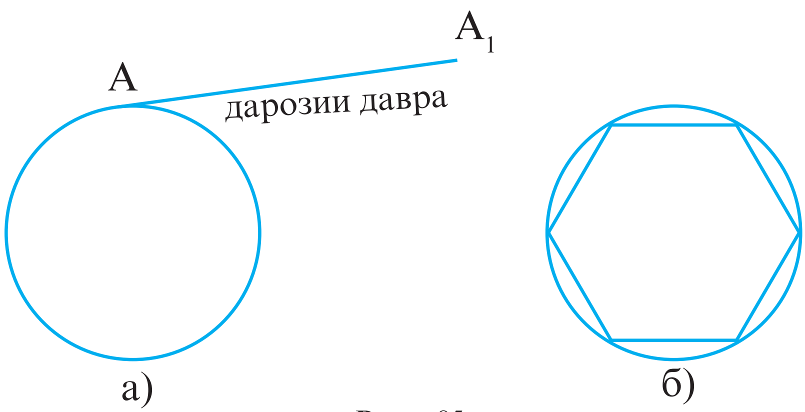
Фарз мекунем, ки давра аз ягон ресмони наёзанда сохта шуда бошад. Ресмонро аз ягон ҷояш, ба шакли порча рост мекунем. Дарозии ҳамин порча дарозии давра аст (расми 85, а).

Дар дохили давра ягон n – кунҷаи мунтазамро мекашем. Агар адади n-адади бениҳоят калон гирифта шавад, периметри n – кунҷаи мунтазами дарункашида тақрибан ба дарозии давра баробар мешавад.

Агар $P_n = 2 \cdot R \cdot n \cdot \sin\dfrac{180^0}{n}$ периметри n-кунҷаи мунтазам буда, C дарозии давра бошад, $P_n \approx C$ мебошад.

Теорема. *Нисбати дарозии давра бар диаметр барои ҳамаи давраҳо қимати баробар дорад (яъне, бузургии доимӣ аст).*

Исбот. Бигузор, ду давраи $O_1(R_1)$ ва $O_2(R_2)$ дода шуда бошанд. Дар дохили ҳар як давра n–кунҷаҳои мунтазамро мекашем (расми 86 а,б).



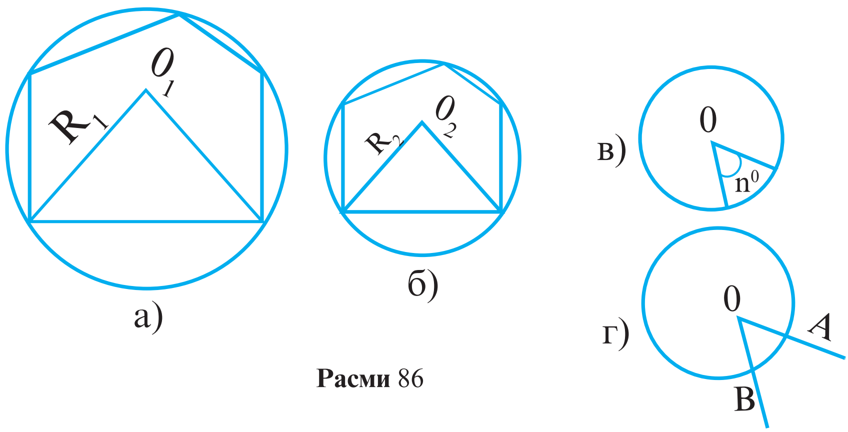
Расми 85

Дар натиҷа: $C_1 \approx P_1 = 2R_1 \cdot n \cdot \sin\frac{180^0}{n}$, $\frac{C_1}{2R_1} \approx \frac{P_1}{2R_1} = n \cdot \sin\frac{180^0}{n}$,

$C_2 \approx P_2 = 2R_2 \cdot n \cdot \sin\frac{180^0}{n}, \frac{C_2}{2R_2} \approx \frac{P_2}{2R_2} = n \cdot \sin\frac{180^0}{n}$.

Аз ин ҷо $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$ мешавад.

Нисбати дарозии давраро бар диаметр бо ҳарфи π (пи) ишора мекунанд. $\frac{C}{2R} = \pi$. Аз ин ҷо, $C = 2\pi R$ формулаи дарозии давра мебошад.



Расми 86

Қимати адади π аз замонҳои қадим диққати олимонро ба худ ҷалб кардааст. Дар асри III то милод олими бузурги юнонӣ Архимед қимати π-ро тақрибан $\frac{22}{7} \approx 3,14$ гирифта буд, яъне $\pi \approx 3,14$.

Дар натиҷаи тадқиқот маълум шуд, ки адади π касри даҳии ғайридаврии беохир, яъне адади ирратсионалӣ мебошад. Қимати тақрибии он $\pi \approx 3,1416....$ мебошад.

2. Дарозии камони давра

Як даври пурра 360^0 аст. Агар дарозии давраро ба 360 тақсим кунем, дарозии камони 1^0-ро ҳосил мекунем.

Дарозии камони давраеро ҳисоб мекунем, ки ба кунҷи марказии n^{o} мувофиқ бошад (расми 86).

Дарозии нимдавра, яъне πR ба кунҷи кушод мувофиқ меояд. Аз ин рӯ, камони дарозияш $\frac{\pi R}{180^{o}}$ ба кунҷи 1^{o} мувофиқ меояд.

Ҳамин тариқ, камони дарозияш $l = \frac{\pi R}{180^{\circ}} \cdot n^{\circ}$, ба кунҷи n^{o} мувофиқ меояд.

Нисбати дарозии камони мувофиқ ба радиуси давраро **ченаки радиании кунҷ** меноманд.

Формулаи дарозии камони давраро татбиқ намуда, ҳосил менамоем: $\frac{1}{R} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \cdot n^{\circ}$. Пас, ченаки радиании кунҷ аз зарби дараҷагӣ ба $\frac{\pi}{180^{\circ}}$ ҳосил мешавад.

Масалан, ченаки радиании кунҷи 180° ба π ва ченаки радиании кунҷи рост ба $\frac{\pi}{2}$ баробар аст. Воҳиди ченаки радиании кунҷ радиан мебошад. Кунҷи якрадианӣ кунҷест, ки дар он дарозии камон ба радиус баробар аст (расми 86г).

Масъала. Секунҷаи ABC дода шудааст, ки дар он $\angle B=80^{\circ}$, $\angle C=40^{\circ}$ аст. Ченаки радиании кунҷҳои секунҷа ёфта шавад.

Ҳал. Дар асоси теоремаи ҳосили ҷамъи кунҷҳои дарунии секунҷа $\angle A=180^{\circ}-(\angle B+\angle C)=180^{\circ}-120^{\circ}=60^{\circ}$ аст.

Ченаки радиании кунҷи B ба $80^{0} \cdot \frac{\pi}{180^{0}} = \frac{4\pi}{9}$, ченаки радиании кунҷи C ба $40^{0} \cdot \frac{\pi}{180^{0}} = \frac{2\pi}{9}$, ченаки радиании кунҷи A ба $60^{0} \cdot \frac{\pi}{180^{0}} = \frac{\pi}{3}$ баробар мешавад.

Масъалаҳои амалӣ

1. Дарозии давраро ёбед, агар радиусаш: а) 2 см; б) 5 см; в) 8 см; г) 15 м бошад.

2. Радиуси давраро ёбед, агар дарозии давра ба: а) 20 см; б) 18 см; в) 1,28 см баробар бошад.

3. Дарозии камонро ёбед, агар бузургии градусиаш:

а) 30^0; б) 45^0; в) 60^0; г) 90^0 буда, R=4 см бошад.

4. Радиуси давраро ёбед, агар:

а) С=2 см ва $n^0=30^0$; б) C=10 м ва $n^0=60^0$; в) C=6,325 ва n^o=90 бошад.

5. Дарозии камони давраро ёбед, агар:

а) R=3 см ва $n = \frac{3}{4}\pi$; б) R=5 м ва $n = \frac{3}{4}\pi$;

в) R=8 дм ва n=4 радиан бошад.

6. Дарозии камони давра 50 см буда, радиусаш 30 м аст. Бузургии градусӣ ва радиании камони давраро ёбед.

7. Диаметри давра ба 30см баробар аст. Дарозии камони ба чоряк, сеяк, нисф ва шашяки давра баробарро ёбед.

8. Радиуси Замин тақрибан ба 6400 км баробар аст. Дарозии экватор (хатти истиво)-и Заминро ёбед.

§ 5.2. Масоҳати доира ва қисмҳои он

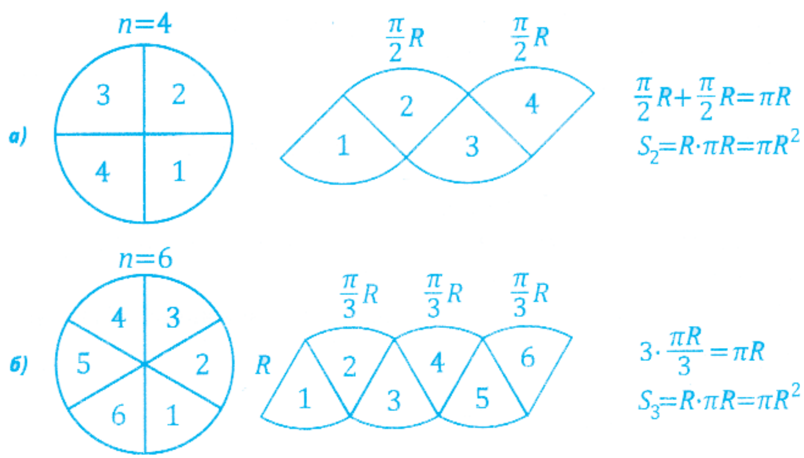
1. Масоҳати доира

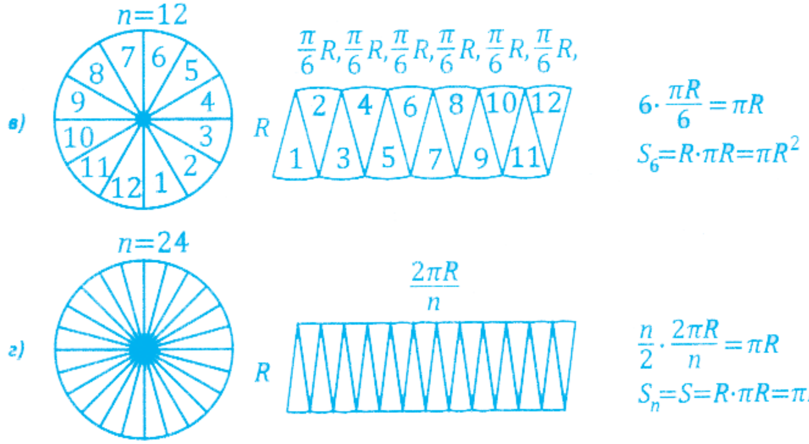
Доира ҳам ба монанди фигураҳои дигар дорои масоҳат мебошад.

Теорема. *Масоҳати доира ба* πR^2 *баробар аст, яъне*

$S=\pi R^2$.

Исбот. Доираеро ба n қисмҳои баробар тақсим мекунем ва ин қисмҳоро дар шакли расмҳои зерин ҷойгир менамоем (расми 87):





Расми 87

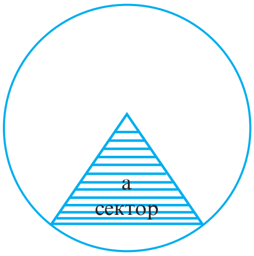
Аз мушоҳидаи расмҳо маълум аст, ки дар ҳолати қиматҳои бениҳоят калон қабул кардани n, расмҳо ба росткунҷае табдил меёбанд, ки дарозияш πR буда, баландияш R мебошад. Масоҳати доира ба масоҳати ҳамин гуна росткунҷа баробар аст, яъне

$S = S_{n \to \infty} = R \bullet \pi R = \pi R^2$. Инак, $S_{доира} = \pi R^2$.

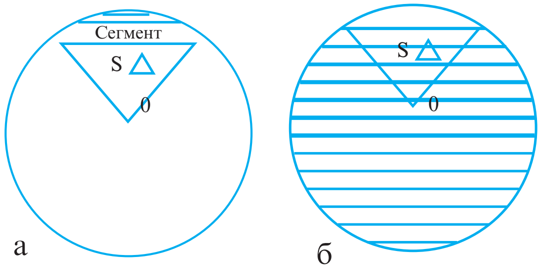
2. Сектори доиравӣ ва масоҳати он

Таъриф. *Он қисми доира, ки бо ду радиус маҳдуд аст, сектори доиравӣ ном дорад.* Агар давраи доираро ба 360 қисми баробар тақсим карда, нуқтаҳои тақсимотро ба марказ пайваст кунем, секторҳои камонҳояшон ба 1^0 мувофиқ ҳосил мешаванд. Агар масоҳати доираро ба 360 қисм тақсим кунем, масоҳати сектори камонаш 1^0 ҳосил мешавад.

Ҳамин тариқ, $\frac{\pi R^2}{360}$ масоҳати сектори 1^0 аст. Агар камони сектор ё кунҷи марказии ба он мувофиқ a бошад, масоҳати сектор бо формулаи $S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot a$ ҳисоб карда мешавад.



Расми 88



Расми 89

3. Сегменти доиравӣ ва масоҳати он

Таъриф. *Он қисми доира, ки бо хорда маҳдуд аст, сегменти доиравӣ ном дорад.*

Масоҳати сегменти доиравиро бо формулаи $S=S_{сек} \pm S_{\triangle}= =\frac{\pi R^2}{360}\alpha \pm S_{\triangle}$ ҳисоб мекунанд. Дар ин ҷо α бузургии градусии камони сегмент буда, дар ҳолати $\alpha<180^0$ будан, масоҳати секунҷа аз масоҳати сектор тарҳ ва дар ҳолати $\alpha>180^0$ будан масоҳати сектор ба масоҳати секунҷа ҷамъ карда мешавад.

Масъалаҳо

1. Масоҳати доираро ёбед, агар радиусаш ба: а) 5 см; б) 4 см; в) 3,2 см, г) $\frac{3}{4}$ баробар бошад.

2. Масоҳати доираро ёбед, агар диаметраш ба а) 12 м; б) 0,6 дм; в) 32 см; г) $\frac{1}{2}$ м баробар бошад.

3. Масоҳати доираро ёбед, агар дарозии давра ба *C* баробар бошад.

4. Масоҳати ҳалқаи доиравиро ёбед, агар вай бо доираҳои ҳаммаркази радиусҳояшон: 1) 4 см ва 6 см; 2) 5,5 м ва 6,5 м; 3) a ва $2a$; 4) a ва b ($a>b$) маҳдуд бошад.

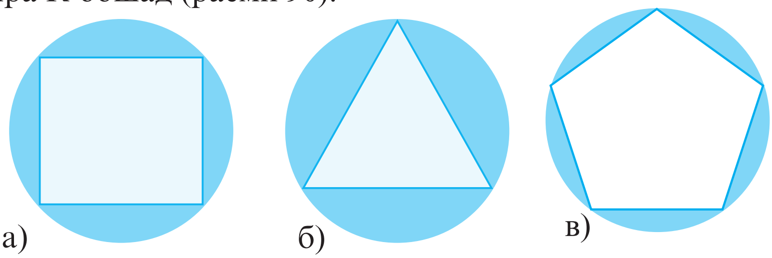
5. Агар диаметри доира 1) 2; 2) 5; 3) 6 маротиба зиёд карда шавад, масоҳаташ чӣ гуна тағйир меёбад?

6. Нисбати масоҳати доира ба масоҳати: а) секунҷа, б) чоркунҷа, в) шашкунҷаи мунтазами дарункашидаро ёбед.

7. Масоҳати сектори доиравии кунҷи марказиаш: а) 40^0; б) 90^0; в) 150^0; г) 240^0; д) 300^0; е) 330^0-ро ёбед, агар R=10 см бошад.

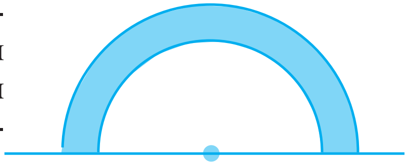
8. Хорда ба радиуси доира баробар аст. Масоҳати сегментҳои бо он маҳдудро ёбед, агар R= 10 см бошад.

9. Масоҳати қисмҳои дар расмҳо бо хатҳои рах-рах ҷудокардаро ёбед, агар бисёркунҷаҳо мунтазам буда, радиуси доира R бошад (расми 90).



Расми 90

10. Наъли асп шакли нимҳалқаро дорад. Агар радиуси берунии наъл 8 см ва радиуси дохилияш 6 см бошад, масоҳаташро ёбед (расми 91).



Расми 91

Савол ва супоришҳо барои санҷиш

1.Таърифи давраро баён намоед.
2. Формулаи дарозии давраро исбот кунед.
3. Қимати градусӣ ва радианни π-ро нависед.
4. Камони давра чӣ тавр муайян карда мешавад?
5. Кунҷи марказӣ чист?
6. Дарозии камонро бо кадом формула меёбанд?
7. Таърифи доираро баён кунед.
8. Масоҳати доираро чӣ тавр меёбанд?
9. Сектори доиравӣ чист?
10. Чиро масоҳати сектори доиравӣ меноманд?
11. Сегменти доиравӣ чист?
12. Масоҳати сегменти доиравиро чӣ тавр ҳисоб мекунанд?

ФАСЛИ VI. ЧЕНКУНИҲО ДАР МАҲАЛ

§ 6.1. Муайян кардани баландӣ

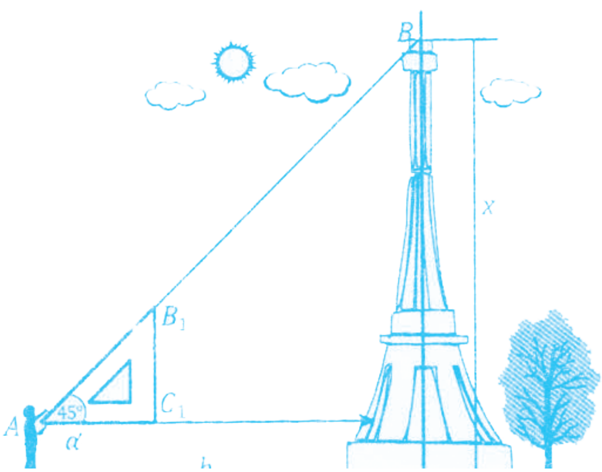
1. Баландии манора

Барои муайян кардани баландии манора, дар хатти рости MD нуқтаи M-ро тарзе интихоб мекунем, ки агар аз нӯги ходача $AM \perp MD$ ба равиши AB нигоҳ кунем, нуқтаи B дар таҳти кунҷи 45^0 намоён гардад. Нуқтаи B қуллаи манора буда, $AC \parallel MD$ мебошад (расми 92).

Маълум аст, ки секунҷаи росткунҷаи баробарпаҳлу дорои кунҷи 45^0 мебошад. Кунҷи тези ин секунҷаро дар нуқтаи A гузошта, ба равиши катети AC нигоҳ карда, нуқтаи C-ро мебинем (бояд $AC \parallel MD$ бошад). Агар дар ин асно қад-қади гипотенуза нигоҳ кунем, қуллаи манора (B) бояд дар хатти рости AB намудор гардад. Дар натиҷа, ΔABC секунҷаи росткунҷаи дорои $\angle A=45^0$ буда, баробарпаҳлу мебошад.

Бинобар ин, $BC=MD=AC$.

Агар дарозии ходача $AM=a$, масофа аз он то манора $MD=b$ бошад, баландии манора $x=BC+CD=AC+AM=$ $=MD+AM=a+b$ мешавад.



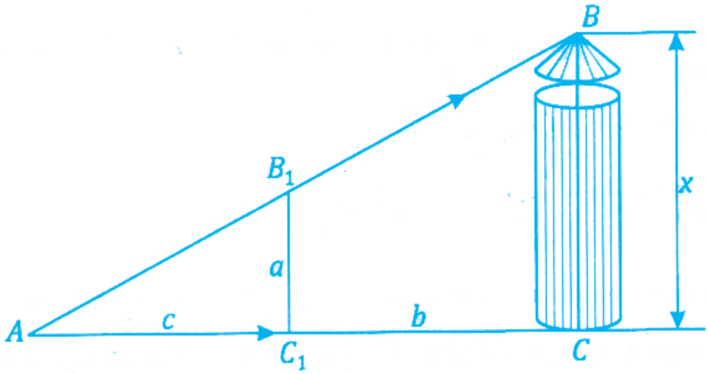
Расми 92

Мисол. Агар $MD=b=40$ м, $AM=b=1$ м бошад, баландии манора $x=a+b=40$ м $+1$ м$=41$ м мешавад.

Супориши 1. Шумо аз секунҷаи росткунҷаи нақшакашӣ, ходача ва метр истифода бурда, баландии ягон манора ё бинои маҳаллаатонро муайян намоед.

2. Баландии қубури дудкаш

Дар дасти мо ходаи дарозияш $B_1C_1=a$ ва метр аст. Аввал хатти рости $AC \perp BC$-ро месозем (расми 93).



Расми 93

Дар ин хатти рост нуқтаҳои A ва C_1-ро тарзе интихоб менамоем, ки агар аз нуқтаи A ба воситаи нӯги ходача (B_1) ба қуллаи дудкаш (нуқтаи B) нигарем, нуқтаҳо дар як хатти рост намудор шаванд.

Дар натиҷа, $\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1$, $BC{:}B_1C_1=AC{:}AC_1$ ё $x{:}a= =AC{:}AC_1$ мешавад.

Агар $AC=b$ ва $A_1C_1=c$ бошад, $x{:}a=b{:}c$ буда, баландии дудкаш ба $x = \dfrac{a \cdot b}{c}$ баробар мешавад.

Мисол. Агар дарозии ходача $B_1C_1=a=2$м, $AC=b=27$м ва $AC_1=c=3$м бошад, баландии қубури дудкаш $x = \dfrac{a \bullet b}{c} = \dfrac{2 \bullet 27}{3} = 18\,\text{м}$ мешавад.

Супориши 2. Шумо ба воситаи ходачаи дарозияш муайян ва метр баландии ягон қубури дудкаш, симчӯб, бино ва ё манораи маҳаллаатонро муайян намоед.

3. Баландии теппа ё кӯҳ

Дар расми 94 кӯҳе тасвир ёфтааст. Баландии ин кӯҳ $MC=x$-ро муайян кардан лозим аст. Дар дасти мо зовиясанҷ ва метр мавҷуд аст.

Аз ягон нуқтаи B $\angle CBM=\beta$-ро чен карда, дар хатти рости AM масофаи $AB=a$-ро қайд менамоем. Аз нуқтаи A $\angle CAM=\alpha$ -ро чен мекунем.

Дар натиҷа: 1) Аз секунҷаи росткунҷаи ACM, $AM=CM:\text{tg}\alpha$. 2) Аз секунҷаи CBM, $BM=CM:\text{tg}\beta$.

$$3)\ AB = AM - BM = \frac{CM}{tg\alpha} - \frac{CM}{tg\beta};$$

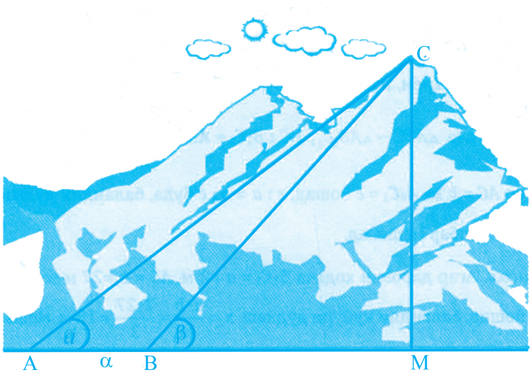
$$AB = \frac{CM(tg\beta - tg\alpha)}{tg\alpha \cdot tg\beta} \text{ ё } CM = \frac{AB \cdot tg\alpha \cdot tg\beta}{tg\beta - tg\alpha}.$$

Аз ин ҷо, баландии теппа ба $x=\dfrac{a \cdot tg\alpha \cdot tg\beta}{tg\beta - tg\alpha}$ баробар мешавад.

Мисол. Агар $AB= a = 3000$ *м*, $\alpha = 30^0$ ва $\beta = 45^0$ бошанд, баландии кӯҳ (расми 94)

$$x = \frac{a \cdot tg\alpha \cdot tg\beta}{tg\beta - tg\alpha} = \frac{3000 \cdot tg30^0 \cdot tg45^0}{tg45^0 - tg30^0} = \frac{3000 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3000}{\sqrt{3} - 1} \approx \frac{3000}{1,7 - 1} =$$

$= \dfrac{3000}{0,7} = \dfrac{30000}{7} = 4285\dfrac{5}{7}$ м мебошад.



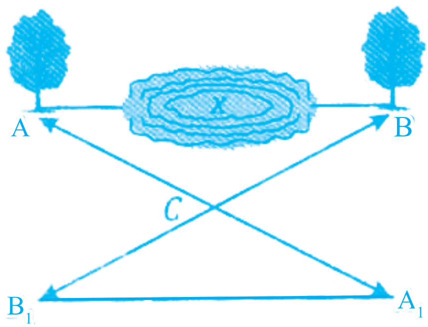
Расми 94

Супориши 3. Шумо ба воситаи зовиясанҷ ва метр баландии ягон теппа ё кӯҳи маҳаллаатонро муайян намоед.

§ 6.2. Муайян кардани масофаи дастнорас

1. Масофаи байни ду маҳал

Дар байни маҳалҳои A ва B ботлоқ ё ҷарие мавҷуд аст. Талаб карда мешавад, ки масофаи $AB= x$-ро муайян намоем. Аввал, нуқтаи C-ро тарзе интихоб менамоем, ки аз он ба маҳаллаҳои A ва B рафтан мумкин бошад. Сипас, масофаи BC-ро чен карда, аз нуқтаи C дар хатти рости BC нуқтаи B_1-ро, ки масофаи $B_1C=BC$ аст, меёбем. Айнан ҳамин тавр, нуқтаи A_1-ро дар хатти рости AC муайян менамоем ($A_1C=AC$).



Расми 95

Акнун масофаи A_1B_1-ро чен мекунем ($A_1B_1=a$).

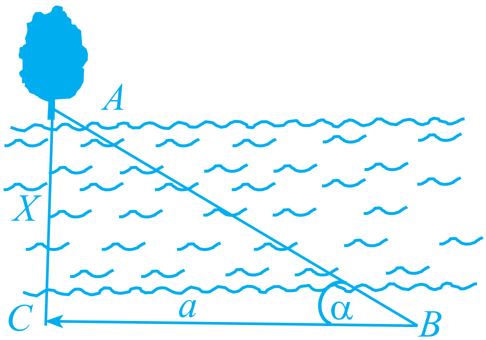
Дар натиҷа, $\Delta ACB=\Delta A_1CB_1$ шуда (мувофиқи аломати якуми баробарии секунҷаҳо), $AB=A_1B_1$ ё $x=a$ мешавад (расми 95).

Мисол. Агар масофаи $A_1B_1=a$ =400 м бошад, масофаи байни ду маҳал x=400 м мешавад.

Супориши 4. Шумо аз тарзи нишондоди дар боло овардашуда истифода бурда, масофаи байни ду маҳалро амалан муайян намоед.

2. Муайян кардани масофаи байни соҳилҳо

Дар расми 96 дарё тасвир ёфтааст. Талаб карда мешавад, ки бари дарё, яъне масофаи $AC=x$ муайян карда шавад.



Расми 96

Қад-қадди соҳил масофаи $CB=a$-ро чен менамоем (бояд $AC \perp CB$ бошад). Аз нуқтаи B, $\angle CBA=\alpha$-ро бо зовиясанҷ муайян менамоем.

Дар натиҷа, $\frac{AC}{CB} = tg\alpha$ ё $AC = CB \cdot tg\alpha$.

Агар $AC=x$ ва $CB=a$ бошад, бари дарё $x=a\text{tg}\alpha$ мешавад.

Мисол. Агар $CB=a=40$м ва $\alpha=30^0$ бошад, бари дарё $x=a\text{tg}\alpha=40\text{ м}\cdot\text{tg}30^0=40\text{ м}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 40\text{ м}:1{,}7\approx 23{,}53$ м мешавад.

Супориши 5. Шумо дар маҳалли зистатон бари дарё ё ҷариеро бо тарзи дар боло пешниҳодшуда амалан муайян намоед.

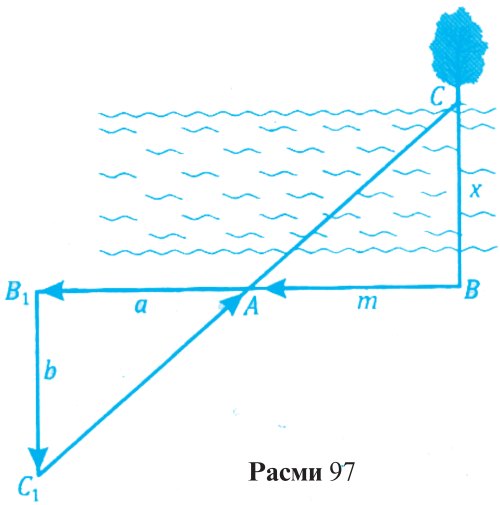
3. Муайян кардани бари дарё бе ёрии зовиясанҷ

Дар расми 97 масофаи $BC=x$ бари дарё мебошад. Қад-қадди соҳил масофаҳои AB ва AB_1-ро чен мекунем.

Сипас, аз нуқтаи B_1 хатти рости $B_1C_1 \perp B_1B$-ро мегузаронем.

Нуқтаи C_1 дар B_1C_1 тарзе интихоб карда мешавад, ки нуқтаҳои C_1, A, C дар як хатти рост ҷойгир бошанд. Агар $B_1C_1=b$, $AB_1=a$, $AB=m$ бошад,

$\Delta C_1B_1A \sim \Delta CBA$ буда, $\frac{x}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1}$ ё $\frac{x}{m} = \frac{b}{a}$ ва $x=(b \cdot m):a$ мешавад.



Расми 97

Мисол. Агар b=10 м, m=20 м ва a=5 м бошад, бари дарё $x = \frac{b \cdot m}{a} = \frac{10 \cdot 20}{5} = 40$ м мешавад.

Супориши 6. Бо тарзи дар боло пешниҳодшуда бари ягон дарё ё ҷариеро муайян намоед.

§ 6.3. Муайян кардани умқи чоҳ

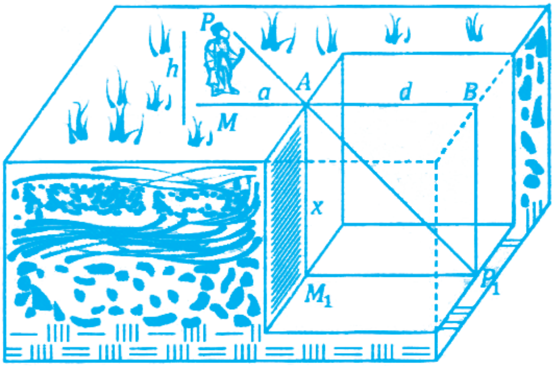
Дар расми 98 чоҳе тасвир ёфтааст. Талаб карда мешавад, ки умқи (чуқурии) чоҳ $AM_1 = x$ муайян карда шавад.

Яке аз олимони бузурги мо Абурайҳони Берунӣ тарзи зерини муайян кардани умқи чоҳро пешниҳод намудааст.

Бигузор, қадди одам $MP=h$ бошад. Аз лаби чоҳ дар масофаи $AM=a$ тарзе рост меистем, ки канори болоии чоҳ (A) ва канори поинии чоҳ (P_1) дар як хатти рост ҷойгир шаванд.

Агар диаметри болоии чоҳ $AB=d$ бошад, $\Delta AM_1P_1 \sim \Delta PMA$ аст. Барои ҳамин, $\frac{x}{M_1P_1} = \frac{PM}{MA}$ ё $\frac{x}{d} = \frac{h}{a}$ ва $x = \frac{h \cdot d}{a}$ мешавад.

Ҳамин тариқ, $x = \frac{h \cdot d}{a}$ умқи чоҳи номбурда мебошад.



Расми 98

Мисол. Агар h=1,8 м қадди одам, a=0,6 м масофаи ҷойи истодаи одам то канори чоҳ, d=2м диаметри чоҳ бошад, умқи чоҳ $x = \frac{h \cdot d}{a} = \frac{1,8 \cdot 2}{0,6} = 6.$ Яъне, x=6м мешавад.

Супориши 7. Шумо бо тарзи номбурда умқи ягон ҷарӣ ё чоҳи маҳаллаатонро муайян намоед.

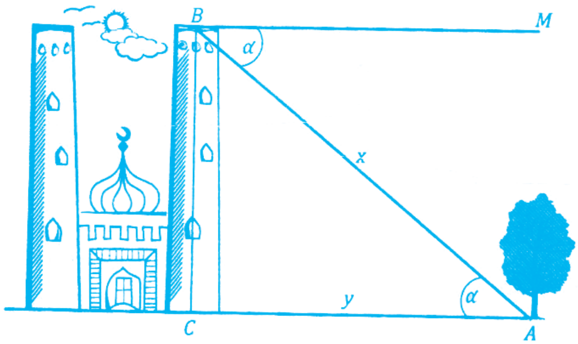
§ 6.4. Ёфтани масофа аз баландии муайян

Баландии манора ё теппа $CB=H$ мебошад. Масофаро аз қуллаи манора то маҳалли A меёбем.

Аз қуллаи манора кунҷи байни уфуқ ва маҳалро чен мекунем: $\angle$MBA=α (расми 99).

Дар натиҷа, $\angle$CAB=$\angle$MBA мешавад, чунки ин кунҷҳо чилликӣ мебошанд. Дар натиҷа, H:x=sinα ё $x = \frac{H}{\sin\alpha}$ мешавад.

Агар масофаи манораро то маҳал бо $y=AC$ ишора намоем, H:y=tgα, $y = \frac{H}{\text{tg}\alpha}$ мешавад.



Расми 99

Мисол. Агар H=160 м баландии манора ва $\alpha=30^0$ бошад, $x=\dfrac{H}{\sin\alpha}=\dfrac{160}{\sin 30^0}=160:0,5=320$ м–масофа аз болои манора то маҳал ва $y=\dfrac{160}{\mathrm{tg}30^0}=160\cdot\sqrt{3}$ м ё $y\approx 160\cdot 1,7\approx 272$м,

яъне, $y\approx 272$ м масофа аз манора то маҳал мебошад.

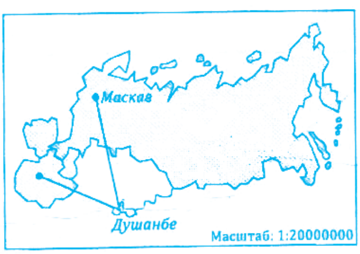
Супориши 8. Шумо аз болои теппа ё манораи баландияш маълум масофаи ягон маҳалро муайян намоед.

Масъалаҳо

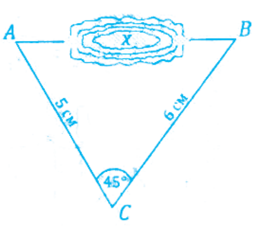
1. Шумо масофаи байни шаҳрҳои Душанбе ва Маскавро, ки дар харитаи миқёсаш 1:20000000 ба 16 см баробар аст, муайян намоед (расми 100).

2. Аз рӯйи андозаҳои расми 101 масофаи байни маҳаллаҳои A ва B-ро ёбед, агар миқёси расм 1:10000 бошад.

Нишондод. Аз теоремаи косинусҳо истифода баред.

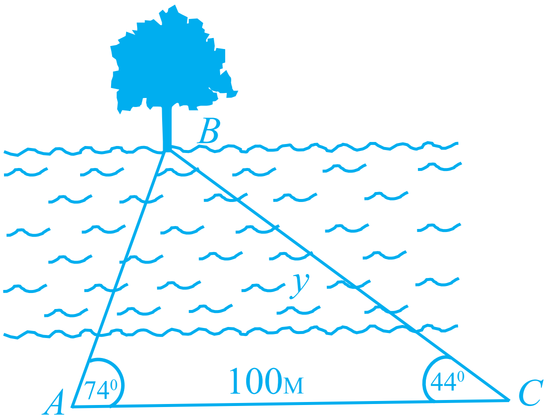


Расми 100



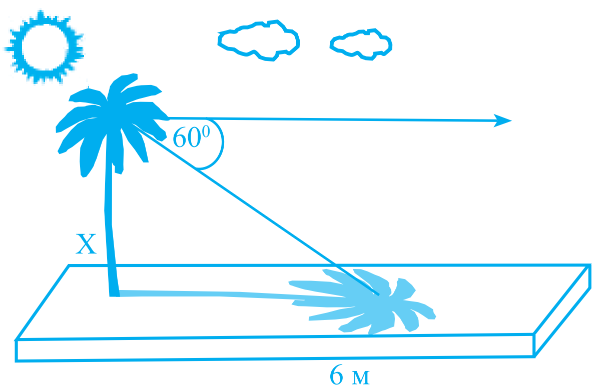
Расми 101

3. Аз рӯйи андозаҳои расми 102 масофаҳои дастнораси AB ва BC-ро ҳисоб кунед.



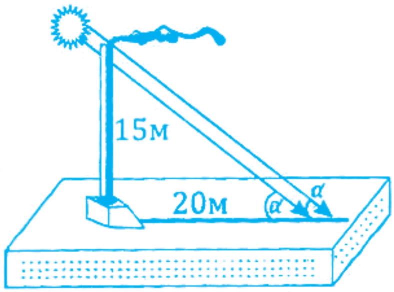
Расми 102

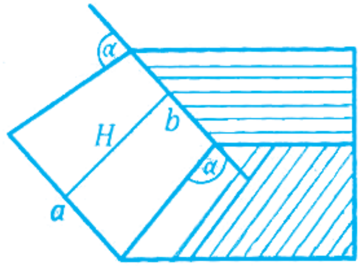
4. Баландии дарахтро муайян намоед, агар сояаш дар сатҳи Замин 6 м буда, нури Офтоб нисбат ба уфуқ кунҷи 60^0-ро ташкил диҳад (расми 103).



Расми 103

5. Баландии қубури дудкаш 15 м буда, сояаш дар сатҳи Замин 20 м аст. Кунҷи афтиши нурҳои Офтобро нисбат ба сатҳи Замин ёбед (расми 104).





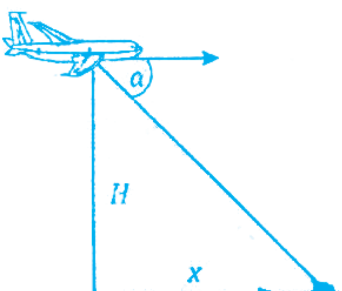
Расми 104 **Расми** 105

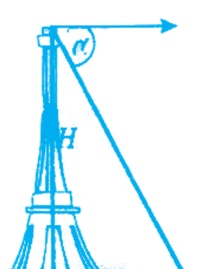
6. Бари хоктеппа аз боло ба *b* ва аз поён ба *a* баробар мебошад. Тарафҳои паҳлуии хоктеппа бо хатти уфуқ кунҷи α-ро ташкил медиҳанд. Агар b=10м, a=24м, $\alpha=25^0$ бошад, баландии хоктеппаро ёбед (расми 105).

7. Роҳи оҳан дар нишеб, дар ҳар як 30 метр 0,5м баланд мешавад. Кунҷи баландшавии роҳро муайян намоед.

8. Аз тайёра (ҳавопаймо) ба капитани киштии моҳигирӣ бо радио хабар доданд, ки тайёра дар баландии $H\approx950$ м дар болои селаи моҳиҳо парвоз менамояд. Аз киштӣ кунҷи баландшавии тайёра $\alpha\approx30^0$ мебошад. Масофаи байни киштӣ то селаи моҳиҳо муайян карда шавад (расми 106).

9. Баландии манора аз сатҳи баҳр H=150 м мебошад. Масофаи байни манораро то киштӣ муайян намоед, агар кунҷи моилӣ $\alpha=45^0$ бошад (расми 107).





Расми 106 **Расми** 107

10. Бо истифода аз харитаи сиёсии ҷаҳон масофаи байни Душанбе ва шаҳрҳои зерин ёфта шавад: Париж, Лондон, Кобул, Макка, Деҳлӣ, Токио (миқёс 1:20000000).

11. Бари коғази гулдор 60 см мебошад. Муайян намоед, ки барои хонаи андозааш 3,2 х 6 х 2,8 чанд метр коғази гулдор харидан лозим аст. Андозаҳои тиреза ва дарро ба назар нагиред.

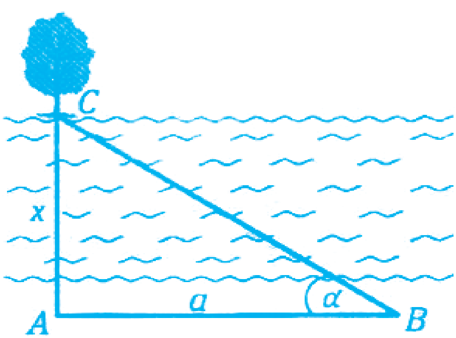
12. Баландии бино 30 м буда, сояаш 4 м аст. Кунҷи афтиши нурҳои Офтобро нисбат ба сатҳи Замин ёбед.

13. Кунҷи афтиши нурҳои Офтоб нисбат ба сатҳи Замин 60^0 буда, сояи симчӯб 3 м аст. Баландии симчӯбро ёбед.

14. Ақрабаки масофасанҷ дар 1000 қадам як бор давр мезанад. Агар 1, 10, 150, 1250, 1500 қадам гузошта шавад, ақрабак кунҷи чандградусиро мекашад?

15. Дар нимаи рӯз, ҳангоме ки баландии Офтоб бо хатти уфуқ кунҷи α-ро ташкил медиҳад, дудкаши корхона сояи дарозиаш a-ро дорад. Агар $\alpha=28^0$ ва $a=76$ м бошад, баландии дудкашро муайян намоед.

16. Барои муайян кардани бари дарё дар як соҳили он бевосита дар лаби об порчаи $AB=a$ кашида шуда, дар соҳили муқобил, дарахти C ба нишон гирифта мешавад (расми 108). Агар $\angle CAB=90^0$ ва $\angle CBA=\alpha$ чен карда шуда бошанд, бари дарёро ёбед. Агар $a=45$ м ва $\alpha=25^0$ бошад, бари дарё чӣ қадар аст?



Расми 108

Савол ва супоришҳо барои санҷиш

1. Баландии манораро чӣ тавр меёбанд?
2. Умқи чоҳро чӣ тавр муайян месозанд?
3. Масофаи байни ду маҳалро чӣ тавр меёбанд?
4. Аз баландӣ масофаи ягон маҳалро чӣ тавр ҳисоб мекунанд?
5. Масофаи байни ду пунктро (маҳалро) аз харита чӣ тавр ҳисоб мекунанд?
6. Геометрия дар ченкуниҳои маҳал чӣ аҳаммият дорад?
7. Шумо геометрияро дар куҷо татбиқ карда метавонед?
8. Масоҳати ҳавлиятонро чӣ тавр ҳисоб мекунед?
9. Асбобҳо барои чен кардани масофаҳо кадомҳоянд?
10. Кунҷҳоро ба воситаи чӣ чен мекунанд?
11. Масофаи байни ду соҳилро чӣ тавр меёбанд?
12. Баландии кӯҳро чӣ тавр меёбанд?
13. Масоҳати сатҳи мизи хонаатонро чӣ гуна ҳисоб мекунед?
14. Масоҳати майдончаи таҷрибавии мактабатонро чӣ тавр ҳисоб кардан мумкин аст?

Ҷавобҳо ва нишондод ба ҳалли масъалаҳо

Фасли I. Координатаҳои декартӣ дар ҳамворӣ

10. $-3x+y+7=0$.

11. $x=y$.

12. Хатти рост аз нуқтаҳои *A* ва *B* мегузарад, аз нуқтаи C намегузарад.

14. а) A(3;-2); б) B (1;1).

16. а) $k=-\frac{1}{2}$; б) $k=-5$; в) $k=1$.

17. а) $k=1$; б) $k=-0{,}4$.

18. а) *O* (0;0) ва R=3; б) O(-1;2) ва R=2; в) O(3;-5) ва R=5.

19. б**)** Нуқтаҳои A ва C дар давра хобида, нуқтаҳои *B, O* ва *E* намехобанд.

20. $x^2+y^2=6{,}25$.

22. а)$x^2+(y-5)^2=9$; б)$(x+1)^2+(y-2)^2=4$; в)$(x+3)^2+(y+7)^2=0{,}25$.

23. Ҳал. $r^2=(-1)^2+3^2=10$, пас, $x^2+y^2=10$.

24. $x^2+(y-6)^2=25$.

25.Ҳал.а) $x=\frac{x_1+x_2}{2}=2, y=\frac{y_1+y_2}{2}=1, O(2;1), r^2=41, (x-2)^2+$

$+(y-1)^2=41$; б) $(x-3)^2+(y-1)^2=5$.

26. а) O (1;2), $r=2$; б) 0 (-3; 0,5), $r=\sqrt{3}$ в) **Ҳал**. $(x^2-2x+1)+$ $+(y^2-2y+1)=7+2$, $(x-1)^2+(y-1)^2=9$, O(1;1), $r=3$; г) O(1;-2), $r=4$.

27. Нишондод: а) $x^2+4=9$, $x=\pm\sqrt{5}, A(\sqrt{5};\ 2), B(-\sqrt{5};\ 2)$. Давра ва хатти рост дар нуқтаҳои *A* ва *B* ҳамдигарро мебуранд.

б) $x=1$, A (1;2). Давра ва хатти рост дар нуқтаи *A* расандаанд.

28. а) (3;4); б) (4;4).

29. а) (5;3).

Фасли II. Векторҳо.

2. $\overrightarrow{AB}=(-3;4), |\overrightarrow{AB}|=5; \overrightarrow{AC}=(0;4), |\overrightarrow{AC}|=4; \overrightarrow{BC}=(3;0), |\overrightarrow{BC}|=3.$

3. $m=\pm 12.$

4. $1)\vec{a}+\vec{b}=(-3;3), |\vec{a}+\vec{b}|=3\sqrt{2}.$

8. $-2\vec{a}+4\vec{b}=(-6;-8), |-2\vec{a}+4\vec{b}|=10.$

9. $a)|\vec{a}|=10, \lambda=\frac{1}{2};$ б) $|\vec{a}|=5, \lambda=1.$

13. $m=-8.$

14. $\cos\varphi=0, \varphi=\frac{\pi}{2}.$

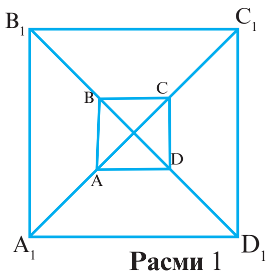
17. $\cos\alpha=0,6; \cos\beta=0; \cos\gamma=0,8.$

23. $|\vec{a}|=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=1$, яъне вектори $\vec{a}$ вектори воҳидӣ аст.

$\vec{b}$ вектори воҳидӣ нест.

$\vec{c}$ вектори воҳидӣ аст.

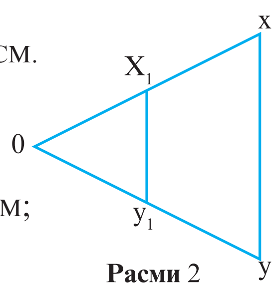
$\vec{d}$ вектори воҳидӣ аст.



Расми 1

Фасли III. Монандӣ ва гомотетия

1. A_1B_1=15см, B_1C_1=9см, A_1C_1=12см.
3. а) Р=56см; в)Р=14см.
4. **Ҳал.** $A_1B_1=2,5\cdot AB=7,5$см;
$A_1D_1=2,5\cdot AD=10$см;
$P=A_1B_1C_1D_1=2\cdot(7,5\text{см}+10\text{см})=35$см;
$S=A_1B_1\cdot A_1D_1=10\cdot 7,5=75\text{см}^2$.



Расми 2

7. Нуқтаи буриши хатҳои XX_1 ва YY_1 маркази гомотетия мебошад.

Фасли IV. Татбиқи монандӣ, гомотетия ва методи координатҳо

$1.1)\ \alpha = 85^0, b = \frac{a \cdot sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{5 \cdot \sin 50^0}{\sin 85^0}, c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{5 \cdot \sin 45^0}{\sin 85^0},$

$P = a + b + c = a + \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}, S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha.$

4. $S = 6\sqrt{6}$ м^2, $\cos\alpha = \frac{5}{7}, \cos\beta = \frac{19}{35}, \cos\gamma = \frac{1}{5}, R = \frac{35}{4\sqrt{6}}, r = \frac{2}{3}\sqrt{6}$.

7. a) $R = 8\frac{1}{8}, r = 4.$

8. $R = 4,5$ см

9. $R = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}.$

10. $R = 29, r = 12.$

11. $a)\ h = 4.$

12. $a)\ h = 4\frac{4}{29}.$

13. $h_a = 12\frac{12}{13}$ см, $h_b = 12$ *см*, $h_c = 11,2$ см.

Фасли V. Дарозии давра ва масоҳати доира

1. а) $\approx 78,5$ см^2; б) $\approx 50,24$ см^2; в) $\approx 32,25$ см^2; г) $\approx 1,8$ см^2.

2. а) 36π м^2; б) $0,09\pi$ м^2; в) 256π см^2; г) 2500π см^2.

3. $C^2/4\pi$.

4. 1) 62,8 см^2.

5.1) **Ҳал.** $D_2 = 2D_1, S_1 = \frac{\pi D_1^2}{4}, S_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi(2D_1)^2}{4} = \pi D_1^2;$

$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi D_1^2}{\frac{\pi D_1}{4}^2} = 4.$

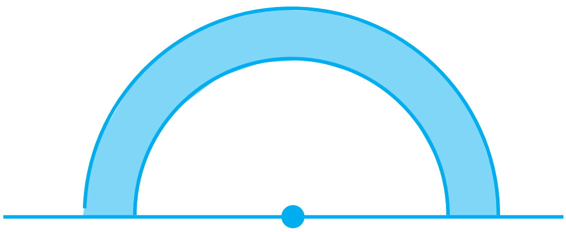
6. а) **Ҳал.** $S_D = \pi R^2, S = \frac{1}{2} R^2 \cdot n \cdot \sin\frac{360^0}{n}$;

$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 3R^2 \cdot \sin\frac{360^0}{3} = \frac{1}{2} 3R^2 \cdot \sin 120^0 = \frac{1}{2} 3R^2 \cos 30^0 = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$;

$\frac{S_D}{S_\Delta} = \frac{\pi R^2}{\frac{3\sqrt{3}}{4} R^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; б) $\pi/2$; в) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

7. а) **Ҳал.** $S = \frac{\pi R^2}{360^0} \bullet \alpha = \frac{\pi R^2}{360^0} \cdot 40^0 = \frac{\pi R^2}{9}$; д) $5\pi R^2/6$.

10. **Ҳал.** $S = S_1 - S_2 = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{2} \cdot 28 = 14\pi$.



Расми 3

Фасли VI. Дарозии давра ва масоҳати доира

1. 432,4 м.
2. $6\sqrt{3}$м.

Мундарича

Фасли V. Дарозии давра ва масоҳати доира

Фасли VI. Ченкуниҳо дар маҳал

ШАРИФОВ ҶУМЪА, БУРҲОНОВ УСТО

ГЕОМЕТРИЯ

Китоби дарсӣ барои синфи 9-уми
муассисаҳои таҳсилоти умумӣ

Муҳаррир	М. Абдукаримов
Мусаҳҳеҳ	М. Саидова
Муҳаррири техникӣ	Қ. Назаров
Тарроҳ	Қ. Назаров

Ба чоп 17.11.2023 иҷозат дода шуд. Коғази офсет.
Чопи офсет. Андоза 60х90 1/16. Ҷузъи чопӣ 7.
Адади нашр 15 000 нусха.
Супориши № 82/2023

Нархаш 17 сомонӣ 06 дирам

Муассисаи нашриявии «Маориф»-и
Вазорати маориф ва илми Ҷумҳурии Тоҷикистон.
734024, ш. Душанбе, кӯчаи Аҳмади Дониш, 50.
Тел. 222-14-66, E-mail: Nashriya@maorif.tj

Дар матбааи ҶДММ "ЭР-граф" чоп шудааст.
Нишонӣ: 734036 Ҷумҳурии Тоҷикистон,
ш. Душанбе, кӯч. Раҳмон Набиев, 218
Тел: +992(37)227-39-92
E-mail: R-Graph.tj@gmail.com